Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Regularidad y existencia de solución de un modelo de ondas en un fluido viscoso

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Luis MILLA GARCÍA

ASESOR

Yolanda Silvia SANTIAGO AYALA

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Milla, L. (2019). *Regularidad y existencia de solución de un modelo de ondas en un fluido viscoso*. Tesis para optar el grado de Matemática Pura. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Hoja de metadatos complementarios

- **Código ORCID del autor:** Sin código
- **Código ORCID del asesor:** 0000-0003-2516-0871
- **DNI o pasaporte del autor:** 06154319
- **Grupo de investigación:** Grupo de Ecuaciones Diferenciales, Análisis y Aplicaciones - GEDAAP
- **Institución que financia la investigación:** Sin financiamiento

  Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación:
  12°03′30″S 77°05′00″O
- **Año o rango de años que la investigación abarcó:** abril 2016 - octubre 2019

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 19:00 horas del día lunes dieciocho de noviembre del dos mil diecinueve, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra e integrado por los siguientes miembros, Mg. Fredy Andrés Ortiz Díaz; Mg. Marlo Carranza Pura y la Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «REGULARIDAD Y EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE UN MODELO DE ONDAS EN UN FLUIDO VISCOSO» presentada por el Bachiller Luis Milla García para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Luis Milla García respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Luis Milla García aprobado con el calificativo de ....18..... .(dieciocho). muy bueno

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura al Bachiller Luis Milla García**.

Siendo las 20:00.. horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Fredy Andrés Ortiz Díaz
Miembro

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Presidente

Mg. Marlo Carranza Purca
Miembro

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Miembro Asesor

FICHA CATALOGRÁFICA

Luis Milla Garcia

Regularidad y existencia de solución de un modelo de ondas en un fluido viscoso, (Lima) 2019.VII., 86p.,29.7cm (UNMSM, Maestría en Matemática Pura, 2019) Tesis de Maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Matemática Pura, UNMSM/FCM II.

RESUMEN

Regularidad y existencia de solución de un modelo de ondas en un fluido viscoso

Luis Milla Garcia

18 de Noviembre del 2019

Asesor : Dr. Yolanda Silvia Santiago Ayala.
Grado obtenido : Magíster en Matemática Pura.

En esta tesis estudiamos la regularidad, existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de la ecuación lineal homogénea KdV-Kuramoto-Sivashinsky

$$\text{(P)} \qquad u_t + u_{xxx} + \beta(u_{xxxx} + u_{xx}) = 0 \ \text{ en } \ H^{s-4}_{per} \ \text{ con } \ u(0) = \phi \in H^s_{per}$$

considerando β una constante positiva, s un número real y denotando por H^s_{per} al espacio de Sobolev periódico de orden s, siguiendo las ideas de [14]. Además, siguiendo estas ideas, incluimos el estudio de la buena colocación del problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor y de la onda. Para esto usamos la teoría de Fourier, análisis armónico y la teoría de Semigrupos de operadores lineales.

Palabras claves:
Ondas en un fluido viscoso, existencia de solución, ecuación KdV-Kuramoto-Sivashinski, espacios de Sobolev periódico, teoría de Fourier, semigrupos.

ABSTRACT

Regularity and existence of solution of a wave model in a viscous fluid

Luis Milla Garcia

November 18, 2019

Adviser : Sc.D. Yolanda Silvia Santiago Ayala.
Obtained : Master in Pure Mathematics.

In this thesis we study the regularity, existence , uniqueness and continuous dependence of the solution of the homogeneous linear equation of KdV-Kuramoto-Sivashinsky

$$\text{(P)} \qquad u_t + u_{xxx} + \beta(u_{xxxx} + u_{xx}) = 0 \ \text{ in } \ H^{s-4}_{per} \ \text{ with } \ u(0) = \phi \in H^s_{per}$$

considering β a positive constant, s a real number and denoting by H^s_{per} Sobolev periodic space of order s, following the ideas of [14]. In addition, following these ideas, we include the study of the wellposedness of solution of the Cauchy problem associated with the equation of heat and wave. For this we will use Fourier theory, harmonic analysis and the theory of Semigroups of linear operators.

Keywords:
Waves in a viscous fluid, existence of solution, equation KdV-Kuramoto-Sivashinski, spaces of Sobolev peridic, Fourier theory, semigroups.

AGRADECIMIENTOS

Al terminar esta etapa de mi vida, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todos mis profesores de pregrado y posgrado que con su ayuda, apoyo, paciencia y comprensión me alentaron a lograr esta hermosa realidad.

Agradezco a Dios por ser mi fortaleza cada día, a mis padres, a mis hermanos, Nelly, Jhonny, Betty, Lilly y Eddy, quienes contribuyeron en mi desarrollo personal y académico.

También deseo expresar mi gratitud, a mi maestra y tutora Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala por su apoyo y sus consejos para culminar satisfactoriamente el objetivo trazado; a los docentes de la Facultad de Ciencias Matemáticas UNMSM. Gracias a mi compañera Silvia Chavarria Dominguez por su apoyo moral y a mis compañeros de carpeta de pregrado, a Luz Victoria Gomez por su apoyo en una etapa de mi vida y a mis compañeros de la maestría.

Finalmente agradezco eternamente y de manera muy especial a mi hijo, Luis David Milla Gomez, quien comparte mis alegrías y éxitos en mi vida.

DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico a mis padres, hermanos y de manera especial a mi Hijo LUIS DAVID MILLA GOMEZ.

CONTENIDO

Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales de evolución tienen gran importancia dentro de la matemática actual debido al papel que juegan dentro de la formulación de modelos para describir fenómenos dinámicos de las ciencias físicas y naturales.
Uno de los aspectos de mayor interés en el estudio de las ecuaciones de evolución es lo relacionado con la regularidad, existencia, unicidad y dependencia continua de la solución del problema de Cauchy o problema de valores iniciales (PVI) asociado a la ecuación de evolución.
Empezamos recordando que la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (K-S):

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxxx} = 0$$

data de mediados de 1970. La primera derivación fue hecha por Kuramoto en el estudio de ecuaciones de reacción-difusión modelando la reacción Belonsov-Zabotinski. Dicha ecuación fue también desarrollada por Sivashinsky en dimensiones más altas en láminas temperadas frontales. Por otro lado, la bien conocida, ecuación no lineal de KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

así como la K-S fueron estudiadas por muchos autores, podemos citar por ejemplo Bona J.L., en [3]. Kato T., en [7] y otros. Del acoplamiento de los dos modelos se deduce el modelo para ondas en un fluido viscoso KdV-Kuramoto-Sivashinsky:

$$(P) \qquad u_t + u_{xxx} + \beta(u_{xxxx} + u_{xx}) = 0 \text{ en } H^{s-4} \text{ con } u(0) = \phi \in H^s$$

considerando β una constante positiva, s un número real y H^s denotando por al espacio de Sobolev periódico de orden s.
Físicamente es un modelo que describe, en una dimensión espacial, la propagación de ondas en medios viscosos. Nos preguntamos si modelo posee solución, y si existe, ¿es única?. En efecto, se consigue probar la existencia y unicidad de solución del PVI (P), y además, que la solución depende continuamente respecto al dato inicial. También estudiamos la regularidad y el comportamiento asintótico de la solución.
Algunos trabajos de la existencia vía semigrupos de operadores lineales fueron desarrollados por Liu, Z. and Zheng, S. [10], Muñoz Rivera [11], Pazy, A. [12], Yolanda Santiago [14,15].
El presente trabajo, en su totalidad, esta constituido por tres capítulos que describiremos a continuación:
El capítulo 1 recoge los resultados conocidos de la teoría de Fourier, análisis armónico, análisis funcional, teoría de Operadores, espacios de Sobolev periódico, y teoría de semigrupos de operadores lineales que serán necesarios a lo largo del mismo.
El capítulo 2 presenta ideas y resultados, del método a aplicar en dos ecuaciones lineales clásicas como son: la ecuación de calor y la ecuación de onda.
El capítulo 3 empieza mostrando algunos aspectos físicos del modelo tridimensional y la derivación al modelo unidimensional que se estudia en esta tesis. Seguidamente se estudia la ecuación lineal homogénea de KdV-Kuramoto-Sivashinsky, siguiendo las

ideas del artículo [14], esto es, usando las propiedades y estimativas de los espacios de Sobolev de forma intuitiva, y luego aplicando el método de semigrupos de operadores lineales. Además estudiamos la regularidad y el comportamiento asintótico de dicha solución en la sección 3.4.

1 Preliminares

El objetivo de este capítulo es recoger algunos resultados conocidos acerca de Análisis Funcional, Análisis Armónico, Teoría de Operadores lineales y Teoría de Semigupos, que serán necesarios a lo largo del trabajo.

1.1 Espacios de Funciones y Sucesiones Periódicas

En esta sección presentaremos la notación y algunos de los espacios que utilizaremos en este y los siguientes capítulos. Una descripción mas detallada de algunos contenidos de esta sección puede consultarse en [4,5,6,8,13,16].
Sean X e Y espacios de Banach. Denotaremos por $\mathcal{B}(X,Y)$ el espacio de todas las transformaciones lineales $T : X \to Y$. El espacio dual de X, es decir, el espacio de todos los funcionales lineales continuos $T : X \to Y$ en X, es denotado por X'.
Si H es un espacio de Hilbert, denotaremos el producto interno por $\langle\cdot|\cdot\rangle$ y siempre asumiremos que es lineal en la primera variable y conjugado lineal en la segunda.

Definición 1. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es llamada periódica con periodo $T \neq 0$ si:*

$$f(x+T) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

El menor periodo $T > 0$ es llamado periodo fundamental de f.

Ejemplo 1. *Las funciones*

$$\Psi_k(x) = cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right),\ \Phi_k(x) = sen\left(\frac{k\pi x}{l}\right), k \in \mathbb{Z}^+,$$

definidas para $x \in \mathbb{R}$, son periódicas con período $2l$; para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, el periodo fundamental de Ψ_k y Φ_k es $\frac{2l}{k}$.

Ejemplo 2. *La función*

$$\Theta_k(x) = exp(ikx),\ k \in \mathbb{Z},$$

es periódica de periodo fundamental $\frac{2\pi}{k}$.

Presentamos ahora algunos de los espacios de funciones periódicas que utilizaremos. Denotemos por $C^n_{per}[-l,l], n \in \mathbb{N}$, la colección de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase C^n y periódicas con periodo $2l$. En el caso $n = 0$, escribiremos simplemente C_{per}. Este espacio es un espacio de Banach respecto de la norma:

$$\|f\|_{C^n_{per}} = \sum_{j=0}^{n} \|f^{(j)}\|_\infty,$$

donde $f \in C^n_{per}[-l,l]$ y $||.||_\infty$ es la norma del supremo, definido por:

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|g(x)| = \sup_{x\in[-l,l]}|g(x)|,$$

donde $g \in C_{per}[-l,l]$. Usaremos la notación C^{∞}_{per} para el espacio de las funciones periódicas infinitamente diferenciables de periodo $2l$. Es claro que $C^{n}_{per}[-l,l] \subset C_{per}[-l,l]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Nosotros podemos definir otras normas en $C_{per}[-l,l]$, como la norma L^1:

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-l}^{l} |f(x)|dx, \tag{1.1}$$

o la norma L^2:

$$\|f\|_{L^2} = \left[\int_{-l}^{l} |f(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}} dx. \tag{1.2}$$

La norma L^2 proviene de un producto interno:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-l}^{l} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1.3}$$

Sin embargo, $C_{per}[-l,l]$ no es completo con respecto a estas dos ultimas normas.

Definición 2. *Sea $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Una función de valores complejos f definido en $\bigcup_{j=0}^{n-1}(x_j,x_{j+1})$ es llamada continua por partes si f es continua en cada uno de los intervalos (x_j,x_{j+1}) y f tiende a un límite finito cuando $x \in (x_j,x_{j+1})$ tiende a x_j o $x_{j+1}, j = 0,1,...,n-1$.*

Denotaremos por $PC_{per}[-l,l]$ el espacio de todas las funciones periódicas de valores complejos de periodo $2l$ que son continuas por partes. Denotaremos por $PC^{n}_{per}[-l,l]$, el conjunto de todas las funciones $f \in PC_{per}[-l,l]$, tal que existe una partición $-l = x_0 < x_1 < ... < x_n = l$ del intervalo $[-l,l]$ con $f \in C^n(x_j,x_{j+1})$ para todo $j = 0,1,...,m-1$ y $f^{(k)} \in PC_{per}[-l,l]$ para todo $k = 1,...,m$. Denotaremos además por $PC^{\infty}_{per}[-l,l]$ para el conjunto de funciones que pertenecen a $PC^{n}_{per}[-l,l]$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Debemos remarcar que las normas L^1 y L^2 definidas en $C_{per}[-l,l]$ no son normas en PC_{per}, pues existen funciones no nulas $f \in PC_{per}$ con $\|f\|_{L^P} = 0$. Desde que todas las otras propiedades de una norma son satisfechas, cada una de las ecuaciones (1.1) y (1.2) define una seminorma, como en la siguiente definición:

Definición 3. *Sea V un espacio lineal. Una seminorma en V es un mapeo $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tal que:*

a) $\|f\| \geqslant 0,$ *para todo* $f \in V$,

b) $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|,$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{C}, f \in V$,

c) (desigualdad triangular) $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|,$ *para todo* $f,g \in V$.

Observación 1. *Todavía podemos hablar de convergencia en un espacio lineal con una seminorma; sin embargo, debemos tener en cuenta que perdemos la unicidad en este contexto. El enfoque habitual en estos casos es definir una relación de equivalencia tal que todos los elementos con seminorma cero sean equivalentes, y luego trabajar en el espacio cociente.*

Además de los espacios de funciones, encontraremos varios espacios de sucesiones. Nuestra sucesión, en general, utilizará el conjunto de todos los enteros como su conjunto de índices, en lugar del conjunto de enteros positivos. Denotemos por $c_0 = c_0(\mathbb{Z})$ el espacio de todas las sucesiones complejas $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que:

$$\lim_{|n|\to\infty} \alpha_n = 0.$$

$l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z})$ denota el conjunto de todas las sucesiones complejas acotados $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Denotamos por $l^1 = l^1(\mathbb{Z})$ el espacio de todas las sucesiones complejas $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que:

$$\|\alpha\|_{l^1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n| < \infty,$$

y por $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ el espacio de las funciones complejas $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

Todos estos espacios son espacios de Banach, además l^2 es un espacio de Hilbert, con producto interno:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \overline{\beta}_n.$$

Observación 2. *Note que la función periódica f de periodo $T > 0$ puede identificarse, de forma natural, con las funciones g definidas en el círculo unitario $S' = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ por $f(t) = g\left(exp\left(i\frac{2\pi t}{T}\right)\right)$ para $t \in [0, T]$. La teoría de la serie de Fourier se vuelve muy natural en este contexto y este será el punto de vista adoptado en este y los próximos capítulos. La "transformada de Fourier", generalmente, está asociado con el caso no periódico. La serie de Fourier y la teoría de la integral de Fourier, de hecho, son instancias de una estructura más general: la hermosa teoría del Análisis armónico en grupos abelianos localmente compactos. Tanto el círculo unitario como la recta agrupan localmente a los grupos abelianos. En el caso compacto del círculo, obtenemos una representación como serie; en el caso no compacto, pero localmente compacto de la recta, obtenemos una integral en lugar de la serie.*

Dado que, sin perdida de generalidad, podemos desarrollar nuestra teoría solo para las funciones periódicas de periodo 2π, para simplificar la notación denotaremos $C^\infty_{per}[-\pi,\pi], C^n_{per}[-\pi,\pi], C_{per}[-\pi,\pi], PC^\infty_{per}[-\pi,\pi], PC^n_{per}[-\pi,\pi]$ y $PC_{per}[-\pi,\pi]$ simplemente por $C^\infty_{per}, C^n_{per}, C_{per}, PC^\infty_{per}, PC^n_{per}$ y PC_{per}, respectivamente. En adelante estaremos considerando series de Fourier de funciones continuas por partes periódicas de periodo 2π. De hecho, como se verá en la siguiente sección, las series de Fourier se pueden definir en un espacio muy "grande" que consiste en funciones periódicas generalizadas que contienen todos los espacios de funciones que consideramos en esta sección.

Definición 4. *Sea $f \in PC_{per}$. La transformada de Fourier de f es la sucesión compleja $\mathcal{F}f = \widehat{f} = \left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ definida por:*

$$(\mathcal{F}f(k)) = \widehat{f}(k) = c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Los números $\widehat{f}(k) = c_k$ son los coeficientes de Fourier de f y la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

es la serie de Fourier generada por f.

Proposición 1. *El mapeo $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ es es una transformación lineal continua de $(C_{per}, \|\cdot\|_{L^1})$ en $l^\infty(\mathbb{Z})$.*

Demostración. la linealidad se deriva de la propiedad correspondiente para integrales.
Seguidamente:

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx = \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En consecuencia,

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{l^\infty} = \sup_k |\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1}.$$

Esto finaliza la prueba □

Notemos que como los elementos de C_{per} son funciones acotadas, también se tiene:

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{l^\infty} = \sup_k \left|\widehat{f}(k)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|_{L^1} \leq \|f\|_\infty.$$

Es importante discutir en qué sentido la serie de Fourier generada por una función $f \in PC_{per}$ representa la función. Este es un asunto bastante delicado. Hay muchas maneras de considerar la convergencia de la serie. Cabe preguntarse por la convergencia puntual. Más precisamente, si $f \in PC_{per}$, nos gustaría saber si:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{N} c_k e^{ikx}.$$

para todos los puntos x donde f es continua y lo que sucede en los puntos de discontinuidad. También se puede preguntar sobre la convergencia con respecto a las normas $L^p, 1 \leq p \leq \infty$. Como veremos a lo largo de esta sección y la siguiente, la convergencia L^2, a saber

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{K=-N}^{N} c_k \Theta_k \right\|_{L^2}^2 = \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{K=-N}^{N} c_k e^{ikx} \right|^2 dx = 0,$$

es, en muchos aspectos, el escenario más natural para el estudio de la convergencia de la serie de Fourier generada f. En la siguiente sección consideraremos varias topologías donde la serie converge a la función que lo generó.
El teorema más usado para garantizar convergencia absoluta y uniforme de sucesiones de funciones es el siguiente resultado conocido como el M-test de Weierstrass.

Teorema 1. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de variable real o compleja definidas en un conjunto A, y supongamos que para cada $\{f_n\}$ existe una constante positiva M_n tal que,*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es absoluta y uniformemente convergente. En particular, si el conjunto A es un espacio topológico y las funciones f_n son continuas en A, entonces la serie converge a una función continua.

Demostración. Para cada x en A la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge, según la prueba de comparación; en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (absolutamente). Además, para todo x en A tenemos:

$$|f(x) - [f_1(x) + ... + f_N(x)]\,| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n.$$

Al ser $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente, el número $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, eligiendo N suficientemente grande. □

Definición 5. Sea α y β dos sucesiones. Entonces la convolución de α y β esta definida por:

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j \beta_{k-j}.$$

Siempre que exista.

Lema 1. *Sea $a, b \in [0, \infty)$ y $s > 0$. Entonces existen constantes positivas m_s y M_s dependiendo únicamente de s tal que:*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a+b)^s \leq M_s(a^s + b^s).$$

Demostración. Ver página 205 de [6]. □

Proposición 2 (Desigualdad de Young)**.** *Sea $\alpha \in l^1$ y $\beta \in l^2$. Entonces $\alpha * \beta \in l^2$ y:*

$$||\alpha * \beta||_{l^2} \leq ||\alpha||_{l^1} ||\beta||_{l^2}.$$

Demostración. Ver página 206 de [6]. □

1.2 Distribuciones Periódicas

En esta sección, introducimos una clase de funciones generalizadas especialmente adecuadas para el estudio de series de Fourier, y ecuaciones diferenciales provistas con condiciones de contorno periódicas. El concepto de función generalizada, como su propio nombre lo indica, se utiliza para generalizar la noción de función y el cálculo habitual, y puede emplearse para construir escenarios adaptados al estudio de diversos problemas de la física matemática y su generalización. De hecho, la teoría de las funciones generalizadas está íntimamente relacionada con el desarrollo de la matemática aplicada y la física teórica durante la primera mitad del siglo XX. En términos generales, una función generalizada es un cierto tipo de funcional lineal, definida en un espacio de funciones de prueba. La razón de esta terminología se aclarará a medida que avancemos. En este punto, vale la pena observar que las propiedades de las funciones generalizadas reflejan las propiedades de la función de prueba en las que se definen. Por ejemplo, una función generalizada es tan diferenciable (en un sentido generalizado) como lo son las funciones de prueba correspondientes (en el sentido habitual). Las distribuciones son clases especiales de funciones generalizadas introducidas por L.Schwartz a principios de 1950. En esta sección estudiaremos las denominadas distribuciones periódicas, que están diseñadas para adaptarse al estudio del problema de Cauchy periódico. Una descripción mas detallada de algunos contenidos de esta sección puede consultarse en [1,2,4,6,9,11].

Definición 6. *El conjunto de todas las funciones* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *los cuales son de clase* C^∞ *y periódicas de periodo* 2π *es denotado por* $\mathcal{P} = C^\infty_{per}$.

Observación 3. $\mathcal{P}$ *es claramente un sub-espacio vectorial de* $C^n_{per}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Se prueba también que* $\mathcal{P}$ *es denso en* C^n_{per} *con respecto a las normas del supremo y* $L^p, 1 \leq p \leq \infty$, *pero no es completo en ninguna de esas normas (caso contrario* $\mathcal{P}$ *seria cerrado en* C^n_{per} *y, desde que* $\mathcal{P}$ *es denso en* C^n_{per}, *concluiríamos que* $\mathcal{P} = C^n_{per}$, *es una contradicción). En efecto no hay una norma natural con respecto al cual* $\mathcal{P}$ *es un espacio de Banach. Sin embargo, existe una distancia natural mediante el cual* $\mathcal{P}$ *es completo. En efecto, se puede probar que:*

$$d(\phi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}{1 + \|\phi^{(j)} - \psi^{(j)}\|_\infty}$$

para $\phi, \psi \in \mathcal{P}$ *, donde* $\|.\|_\infty$ *es la norma del supremo en el intervalo* $[-\pi, \pi]$. *Así se define una métrica en* $\mathcal{P}$ *y que* $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \phi$ *si y solo si* $\|\phi_n^{(j)} - \phi^{(j)}\|_\infty \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ *para todo* $j = 0, 1, 2, \ldots$. *Esta noción de convergencia es muy fuerte:* ϕ_n *y todas sus derivadas convergen uniformemente sobre* $\mathbb{R}$ *(hacia* ϕ *y sus derivadas). En particular* $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \phi$ *implica que* $\phi_n \to \phi$ *con respecto a todas las normas* $L^p, 1 \leq p \leq \infty$. *Como se verá, esto es muy conveniente para nuestros propósitos.*

Teorema 2. $(\mathcal{P}, d)$ *es un espacio métrico completo. Además, si* $(\phi_n) \subset \mathcal{P}$ *y* $\phi \in \mathcal{P}$, *entonces:*

$$\phi_n \xrightarrow{d} \phi \Longleftrightarrow \|\phi_n^{(j)} - \phi^{(j)}\|_\infty \to 0, \forall j \geq 0.$$

Demostración. Ver página 133 de [6]. □

Pasamos ahora al estudio de la transformada de Fourier en $\mathcal{P}$.
Sea $f \in \mathcal{P}$. El k-ésimo coeficiente de Fourier de f es definido por:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$. Denominaremos como la transformada de Fourier de f a la sucesión compleja $\widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$. La serie asociada a f es:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Corolario 1. *Para todo $\phi \in \mathcal{P}, S_N(\phi) \xrightarrow{\mathcal{P}} \phi$, donde $S_N(\phi)$ denota la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier generada por ϕ.*

La prueba es sencilla considerando que $\phi \in \mathcal{P}$ es infinitamente diferenciable,

$$|k|^j|\widehat{\phi}(k)| = |(\phi^{(j)})^\wedge(k)|, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \geq 1.$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^j|\widehat{\phi}(k)| < \infty, \forall j = 0, 1, 2, .. \tag{1.4}$$

En vista de estos comentarios, es natural introducir el siguiente espacio vectorial.

Definición 7. *El espacio de las sucesiones rápidamente decreciente, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, es el conjunto de todas las sucesiones de valores complejos $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^j|\widehat{\alpha}(k)| < \infty, \tag{1.5}$$

para toda $j \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.

$$\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \tag{1.6}$$

si y sólo si:

$$\|\alpha\|_{\infty,j} = \underset{k\in\mathbb{Z}}{sup}(|\alpha_k||k|^j) < \infty, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Demostración. Si $\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, (1.6) implica que $|k|^j|\alpha_k| \to 0$ cuando $k \to \infty$ para todo j, en consecuencia (1.7) es verdadero. Inversamente, asumiendo que (1.7) es verdadero, tenemos:

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} |k|^n|\alpha_k| = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} |k|^{-2}|k|^{n+2}|\alpha_k| \leq \|\alpha\|_{\infty,n+2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} |k|^{-2} < \infty.$$

□

En lo que sigue consideraremos $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ como espacio métrico completo provisto con la distancia:

$$d_*(\alpha, \beta) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\alpha - \beta\|_{\infty,j}}{1 + \|\alpha - \beta\|_{\infty,j}}, \ \alpha, \beta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}),$$

donde:

$$\|\alpha\|_{\infty,j} = \underset{k\in\mathbb{Z}}{sup}(|\alpha_k||k|^j).$$

Note que la sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ converge hacia $\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$, con respecto a d_*, si y solo si $\|\alpha_n - \alpha\|_{\infty,j} \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $j = 1, 2, ...$ En este caso escribiremos $\alpha_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \alpha$.
La desigualdad (1.5), combinado con la definición (6), implica que $\widehat{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Se prueba que estos dos espacios son iguales. En este punto es conveniente introducir la siguiente definición:

Definición 8. *Sea $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$. La transformada inversa de Fourier de α es la función:*

$$\overset{\vee}{\alpha}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, x \in \mathbb{R}.$$

El siguiente teorema ilustra la relación entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ vía la transformada de Fourier.

Teorema 3. *La transformada de Fourier $\wedge : \mathcal{P} \to \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ es un isomorfismo y un homeomorfismo, esto es, lineal, uno a uno, sobre $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, y continua con inversa continua (respecto a las métricas d y d_*).*

Demostración. Ver página 135 de [6]. □

Seguidamente introduciremos el espacio de distribuciones periódicas y estudiaremos sus propiedades básicas.

Definición 9. *(Distribución Periódica). Un funcional lineal en $\mathcal{P}$, $T : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$, es llamado una distribución periódica si existe una sucesión $(\Psi_n(x))_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}$ tal que:*

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

El conjunto de las distribuciones periódicas denotaremos por $\mathcal{P}'$.
No es difícil probar que $\mathcal{P}'$ es un espacio vectorial complejo. El primer ejemplo, y quizá, el más simple de una distribución periódica, son los elementos de C_{per}.

Teorema 4. *Sea $f \in C_{per}$. Entonces la fórmula:*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in \mathcal{P}, \tag{1.8}$$

define una distribución periódica T_f. El mapeo $f \in C_{per} \to T_f \in \mathcal{P}'$ es lineal, uno a uno y continua en el sentido que si $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset C_{per}$ converge uniformemente a f. Entonces, $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle \to \langle T_f, \varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{P}$.

Demostración. Ver página 140 de [6]. □

El teorema anterior muestra que, cualquier función en C_{per} puede ser aproximada uniformemente por funciones en $\mathcal{P}$.

Observación 4. *Existen distribuciones periódicas que no tiene la forma T_f con $f \in C_{per}$. Un ejemplo de este tipo es la función delta de Dirac δ_x centrada en $x \in \mathbb{R}$,*

$$\langle \delta_x, \phi \rangle = \phi(x), \phi \in \mathcal{P}.$$

Para la prueba ver página 140 de [6].

Observación 5. *La fórmula del teorema 4 puede ser usado para definir distribuciones periódicas T_f con f en espacios mas generales, como el espacio PC_{per} (espacio de las funciones periódicas continuas por partes). Otro ejemplo en un nivel bastante elemental es la colección de todas las funciones periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tal que f y $|f|$ son integrables. El siguiente ejemplo ilustra cómo aproximar la función escalón periódico usando elementos de $\mathcal{P}$.*

Ejemplo 3. *Sea H la función periódica de Heaviside, definida:*

$$H(x) = \begin{cases} 0, \ si \ -\pi < x \leq 0, \\ 1, \ si \ 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

$$H(x + 2\pi) = H(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos que $H(x)$ define una distribución periódica mediante la fórmula:

$$\langle T_H, \phi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} H(x)\phi(x)dx = \int_{0}^{\pi} \phi(x)dx, \phi \in \mathcal{P}. \tag{1.9}$$

En efecto; por la linealidad de la integral es fácil ver que (1.9) define un funcional lineal $T_H : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$. Seguidamente mostraremos que T_H es una distribución periódica. Consideremos la sucesión de funciones dadas por:

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} exp\left[-\frac{1}{nx} exp\left(\frac{-1}{1-nx}\right)\right], & \text{si } 0 < x < 1/n, \\ 1, \quad \text{si } 1/n \leq x \leq \pi, \\ exp\left[-\frac{1}{1-n(x-\pi)} exp\left(\frac{-1}{n(x-\pi)}\right)\right], & \text{si } \pi < x < \pi + 1/n, \\ 0, \quad \text{si } \pi + 1/n \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Psi_n(x + 2\pi) = \Psi_n(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se sigue que $\Psi_n(x) \in \mathcal{P}, \Psi_n(x) \to H(x)$ y que $0 \leq \Psi_n(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Si $\varphi \in \mathcal{P}$ se tiene:

$$\left| \int_0^{1/n} \Psi_n(x)\varphi(x)dx \right| \leq \int_0^{1/n} |\varphi(x)|dx \to 0,$$

$$\left| \int_\pi^{\pi+1/n} \varphi(x)dx \right| \leq \int_\pi^{\pi+1/n} |\varphi(x)|dx \to 0,$$

cuando $n \to \infty$, en consecuencia:

$$\begin{aligned} \underset{n\to\infty}{lim} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x)\varphi(x)dx =& \underset{n\to\infty}{lim} \left[\int_0^{1/n} \Psi_n(x)\varphi(x)dx \right] \\ &+ \underset{n\to\infty}{lim} \left[\int_{1/n}^{\pi} \Psi_n(x)\varphi(x)dx + \int_\pi^{\pi+1/n} \Psi_n(x)\varphi(x)dx \right] \\ &= \int_0^{\pi} \varphi(x)dx = \langle T_H, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba.
Tenga en cuenta que podríamos haber usado, en el ejemplo anterior, cualquier función g diferente de H solo en un número finito de puntos, ya que, en este caso,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\varphi(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} H(x)\varphi(x)dx$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}$. Como H no es continuo, esto no contradice el teorema 4. El mapeo $f \to T_f$ es uno a uno solo para $f \in C_{per}$.

Observación 6. *Hasta ahora, todas las funciones utilizadas para definir distribuciones periódicas están acotadas. Es importante destacar que las funciones no acotadas también se pueden utilizar para definir elementos de $\mathcal{P}'$, algunos de los cuales son muy importantes. Esto se hace usando (1.8) en el caso de funciones integrables o generalizando esa fórmula en términos de valores principales. Sin embargo, no todas las funciones no acotadas definen distribuciones.*

Antes de continuar, es conveniente introducir una noción de convergencia en $\mathcal{P}'$. En vista del teorema 4, parece natural definir la convergencia de sucesiones en P' puntualmente.

Definición 10. *Decimos que la sucesión $(T_n) \subset \mathcal{P}'$ converge a $T \in \mathcal{P}'$ si*

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty, \forall \varphi \in \mathcal{P}.$$

En este caso escribiremos $T_n \overset{\mathcal{P}'}{\to} T$.

Observación 7. *Esta noción de convergencia en $\mathcal{P}'$ es muy débil. Se puede mostrar, por ejemplo, que si una sucesión $(f_n) \subset PC_{per}$ converge en cualquiera de las seminormas $L^p, 1 \leq p \leq \infty$ hacia alguna función f, entonces $f \in \mathcal{P}'$ y $f_n \overset{\mathcal{P}'}{\to} f$. Note además que si T y Ψ_n son como en la definición 9, tenemos que $\Psi_n \overset{\mathcal{P}'}{\to} T$, así cualquier distribución periódica puede ser aproximada por una sucesión de distribuciones definidas por elementos de $\mathcal{P}$.*

Nuestro siguiente paso es extender algunas operaciones básicas a P' para generalizar el cálculo habitual al contexto de distribuciones periódicas. El procedimiento estándar para esto es el siguiente: Escribimos la operación en cuestión en lenguaje de distribución y usamos el resultado para definir la operación para distribuciones. Una vez hecho esto siempre se debe verificar si el objeto recién introducido es un elemento de P'.

Definición 11. *Sea $f \in \mathcal{P}'$. La derivada distribucional f' de f es definida por la relación:*

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle, \varphi \in \mathcal{P}.$$

Se prueba que f' también es una distribución. En general para $j \in \mathbb{N}$

$$\langle f^{(j)}, \varphi\rangle = (-1)^j\langle f, \varphi^{(j)}\rangle, \varphi \in \mathcal{P}.$$

Ejemplo 4. *La derivada de la función delta de Dirac es dada por:*

$$\langle \delta_x^{(j)}, \phi\rangle = (-1)^{(j)}\langle \delta_x, \phi^{(j)}\rangle = (-1)^{(j)}\phi^{(j)}(x).$$

Ejemplo 5. *La función:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; si \; -\pi < x \leq 0, \\ x, \; si \; 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

$$f(x + 2\pi) = f(x), \, \forall x \in \mathbb{R},$$

define una distribución periódica por la fórmula usual, es decir,

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi(x)dx = \int_{0}^{\pi} x\phi(x)dx. \tag{1.10}$$

Además,

$$f' = H - \pi\delta_\pi.$$

Donde H es la función de Heaviside.

En efecto, la ecuación (1.10) define un funcional lineal de $\mathcal{P}$ en $\mathbb{C}$. Probaremos que $f \in \mathcal{P}'$. Primero aproximamos f por una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset C_{per}$ y luego aproximamos cada f_n por un $\Psi_n \in \mathcal{P}$. Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), \text{ si } -\pi < x \leq \pi - 1/n, \\ (n\pi - 1)(\pi - x), \text{ si } \pi - 1 < x \leq \pi, \end{cases}$$

$$f_n(x + 2\pi) = f(x), \, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ahora, consideremos $\Psi_n \in \mathcal{P}$ tal que $\|f_n - \Psi_n\| \leq 1/n$. Entonces, para todo $\varphi \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x)\varphi(x)dx \right| \\
&\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f_n(x)] \, |\varphi(x)| dx \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f_n(x) - \Psi_n(x)] \, \varphi(x)dx \right| \\
&\leq \int_{\pi - 1/n}^{\pi} |f(x) - f_n(x)||\varphi(x)|dx + \|f_n - \Psi_n\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|dx \\
&\leq \pi \int_{\pi - 1/n}^{\pi} |\varphi(x)|dx + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|dx \to 0 \text{ , cuando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Se sigue que $f \in \mathcal{P}'$. La derivada distribucional de f puede ser obtenida de la definición de derivada. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle = \langle -f, \varphi' \rangle &= -\int_{0}^{\pi} x\varphi'(x)dx \\
&= -x\varphi(x)|_0^\pi + \int_0^\pi \varphi(x)dx = -\pi\varphi(\pi) + \int_0^\pi \varphi(x)dx \\
&= \langle -\pi\delta_\pi + H, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

En consecuencia $f' = H - \pi\delta_\pi$.

Observación 8. *Note que la función f en el ejemplo anterior es continua pero no diferenciable, en el sentido usual (clásico), en todos los puntos de la forma $2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. En los puntos de la forma $(2n + 1)\pi$, f tiene un salto de tamaño $-\pi = f(((2n + 1)\pi)^+) - f(((2n + 1)\pi)^-) = f(\pi^+) - f(\pi^-)$. Sin embargo, f es diferenciable, en el* *sentido clásico, en todos los puntos que no son múltiplos enteros de π y $f' = H(x)$. Así, la ecuación $f' = H - \pi\delta_\pi$, nos dice que la derivada distribucional de f, es la suma de su derivada clásica y la función delta de Dirac de magnitud π centrada en $x = \pi$. Esta forma de comportamiento es típica: las derivadas distribucionales de la función, con interrupciones de salto (finitas), contienen funciones δ centradas en las discontinuas, y las intensidades son iguales al tamaño del salto. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.*

Proposición 4. *Sea $f \in PC^1_{per}$ y sea $-\pi = x_0 < x_1 < ... < x_n = \pi$ una partición del intervalo $[-\pi, \pi]$ tal que $f \in C^1(x_j, x_{j+1})$ para todo $j = 1, 2, ...$ Si denotamos por $\frac{df}{dx}$ la derivada clásica de f, entonces su derivada distribucional f' está dada por*

$$f' = \frac{df}{dx} + \sum_{j=1}^{n} [f(x_j^+) - f(x_j^-)]\delta_{x_j}.$$

Tenga en cuenta que en los puntos donde f es continuo (incluso si $\frac{df}{dx}$ no lo es) no hay una función δ, desde que $f(x_j^+) = f(x_j^-)$ en todos esos puntos.

Observación 9. *En general no es posible definir el producto de distribuciones periódicas. Sin embargo, dado que el producto de cualquiera de dos elementos de $\mathcal{P}$ también es un elemento de $\mathcal{P}$, es posible multiplicar distribuciones periódicas por funciones de prueba.*

Definición 12. *Sea $\psi \in \mathcal{P}$ y $f \in \mathcal{P}'$. El producto ψf es la distribución periódica definida por la fórmula:*

$$\langle \psi f, \phi \rangle = \langle f, \psi\phi \rangle, \forall \phi \in \mathcal{P}.$$

Es fácil ver en la definición, en efecto, que ψf es una distribución periódica.
Tenga en cuenta que la fórmula habitual para la derivada de un producto se mantiene desde, que para todo $\phi \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \langle (\psi f)', \phi \rangle &= -\langle \psi f, \phi' \rangle = -\langle f, \psi\phi' \rangle \\ &= \langle f, \psi'\phi \rangle - \langle f, \psi'\phi \rangle - \langle f, \psi\phi' \rangle \\ &= \langle \psi' f, \phi \rangle - \langle f, (\psi\phi)' \rangle \\ &= \langle \psi' f + \psi f', \phi \rangle. \end{aligned}$$

1.3 Series de Fourier en $\mathcal{P}'$

En esta sección se extenderá la teoría de Fourier a $\mathcal{P}'$. Para mas información consultar [6,9,14,15].
Como en la sección (1.2) usamos la notación:

$$\Theta_k(x) = e^{ikx}, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Para motivar la definición de la transformada de Fourier de una distribución periódica, sea: $f \in C_{per}([-\pi, \pi]) \subset \mathcal{P}'$. Desde que $\Theta_k \in \mathcal{P}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, podemos reescribir $\widehat{f}(k)$ como:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \langle f, \Theta_{-k} \rangle.$$

Esta observación lleva a la siguiente definición:

Definición 13. *La transformada de Fourier de* $f \in \mathcal{P}'$ *es la función* $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *definida por la fórmula:*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\langle f, \Theta_{-k}\rangle, k \in \mathbb{Z}.$$

Además,

$$S_n(f)(x) = S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\Theta_k$$

es llamada la n*-ésima suma parcial de la serie de Fourier asociada a* f*.*

El siguiente teorema muestra que la sucesión: $(S_n f)_{n=\infty}^{\infty}$ converge siempre hacia f en $\mathcal{P}'$.

Teorema 5. *Sea* $f \in \mathcal{P}'$*. Entonces:* $S_n(f) \in \mathcal{P}, \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $S_n(f) \overset{\mathcal{P}'}{\to} f$ *.*

Demostración. Ver página 188 en [6]. □

En vista del teorema anterior, podemos escribir:

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\Theta_k = \lim_{n\to\infty} S_n(f)\,, f \in \mathcal{P}',$$

donde el límite es tomado en el sentido de $\mathcal{P}'$.

Observación 10. *Note que el teorema* 5 *generaliza el teorema de Weierstrass en* $\mathcal{P}'$*: toda distribución periódica puede ser aproximada, en el sentido de* $\mathcal{P}'$*, por una sucesión de polinomios trigonométricos. Otra consecuencia trivial del teorema* 5 *es la siguiente versión de la identidad de Parseval.*

Corolario 2. *Sea* $\phi \in \mathcal{P}$ *y* $f \in \mathcal{P}'$*. Entonces*

$$\langle f, \phi\rangle = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\phi}(-k).$$

Demostración. Dado que $\varphi \in \mathcal{P}$, entonces: $\varphi \in \mathcal{P}'$ y $\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi}\langle \varphi, \Theta_{-k}\rangle$.
En consecuencia:

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi\rangle &= \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\Theta_k, \varphi \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\Theta_k, \varphi \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\langle \Theta_k, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) 2\pi \widehat{\varphi}(-k) \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k)
\end{aligned}$$

□

Ahora estamos en condiciones de demostrar que $\mathcal{P}'$ es el conjunto de todos los funcionales continuos de $\mathcal{P}$ en $\mathbb{C}$. Ya sabemos que cada elemento de $\mathcal{P}'$ es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{P}$. El argumento empleado en la prueba de teorema 5 se puede adaptar para demostrar que la igualdad se mantiene.

Teorema 6. *$\mathcal{P}'$ es el dual topológico de $\mathcal{P}$, es decir, $\mathcal{P}'$ es precisamente la colección de todos los funcionales continuos de $\mathcal{P}$ en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Ver página 189 en [6]. $\square$

El siguiente paso es dar una caracterización completa de $\mathcal{P}'$ en términos de la transformada de Fourier. Para lograrlo, introducimos la siguiente definición:

Definición 14. *La sucesión compleja $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es dicho de crecimiento lento si existe $C > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$|\alpha_k| \leq C|k|^N, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

El conjunto de todas las sucesiones de crecimiento lento es denotado por: $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$.

Esta notación parece indicar que $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es el espacio dual de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$. De hecho, mostremos primero que cualquier sucesión de crecimiento lento define un función lineal en $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.

Proposición 5. *Si $\alpha = (\alpha_k) \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$, entonces la expresión:*

$$\langle T_\alpha, \beta\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\beta_k, \quad \forall \beta \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \tag{1.11}$$

define un funcional lineal continuo $T_\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$.

Demostración. Primeramente, la serie en (1.11) converge desde que:

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\beta_k\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^N|\beta_k| = C\|\beta\|_{\infty,N} < \infty. \tag{1.12}$$

Como $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ es un espacio topológico localmente convexo de Hausdorff con la topolología inducida por la familia de seminormas:

$$\|\beta\|_{\infty,j} = \sup_{k\in\mathbb{Z}}(|\beta_k||k|^j),\ j \in \mathbb{N},$$

T_α es continuo si y solo si existe una constante $C > 0$ y un conjunto finito de enteros positivos $\{j_1, ..., j_n\}$ tal que:

$$|\langle T_\alpha, \beta\rangle| \leq C\sum_{l=1}^{n} \|\beta\|_{\infty,j_l}.$$

Pero esto, se sigue inmediatamente de: (1.12) $\square$

Observación 11. *Desde que $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es claramente un espacio vectorial complejo, podemos convertirlo en un espacio vectorial topológico, definiendo la topología de la convergencia puntual. Se puede probar que $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es el dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, esto es, $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es la colección de todos los funcionales continuos en: $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$.*

El siguiente teorema muestra por qué $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es tan importante.

Teorema 7. *Sea: $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. Entonces, existe una única $f \in \mathcal{P}'$ tal que $\widehat{f} = \alpha$. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{P}'$ entonces: $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. En otras palabras, $(\mathcal{P}')^\wedge = \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$.*

Demostración. Ver página 191 en [6]. $\square$

1.4 Espacios de Sobolev Periódico

En esta sección introducimos los llamados espacios de Sobolev (de tipo L^2). Como veremos en los capítulos siguientes, son extremadamente útiles en el análisis de las ecuaciones diferenciales parciales que deseamos estudiar en un sentido. Estos espacios proporcionan una clasificación de los elementos de $\mathcal{P}'$ en términos de su suavidad. Una descripción mas detallada de algunos contenidos de esta sección puede consultarse en [6,9,14,15].

Definición 15. *Sea $s \in \mathbb{R}$. El espacio de Sobolev $H^s_{per} = H^s_{per}([-\pi, \pi])$ es el conjunto de todos los $f \in \mathcal{P}'$ tal que:*

$$\|f\|_s^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

En otras palabras, una distribución f esta en el espacio de Sobolev H^s_{per} si y sólo si: $\Big((1 + |k|^2)^{s/2} \widehat{f}(k)\Big)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2 = l^2(\mathbb{Z})$. Denotemos por $l^2_s = l^2_s(\mathbb{Z})$ el espacio de todas las sucesiones $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ con

$$\|\alpha\|_{l^2_s} = \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s |\alpha_k|^2\right]^{1/2}.$$

Así $f \in H^s_{per}$ si y sólo si $\Big(\widehat{f}(k)\Big)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2_s$; en este caso, $\|f\|_s = \|\widehat{f}\|_{l^2_s}$. Es fácil ver que para todo $s \in \mathbb{R}$, H^s_{per} es un espacio de Hilbert, con respecto al producto interno:

$$\langle f|g \rangle_s = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}.$$

En el caso $s = 0$, obtenemos el espacio de Hilbert que es isométricamente isomorfo a: $L^2([-\pi, \pi])$, el conocido espacio de clases de equivalencia de funciones cuadrado integrables en el sentido de Lebesgue. En lo que sigue H^0_{per} a menudo se denotará por L^2_{per}.

Proposición 6. *Se satisface la siguiente inclusión:*

$$\mathcal{P} \subset H^s_{per}, \ \forall s \in \mathbb{R},$$

además, dicha inclusión es densa, i.e. $\overline{P}^{\|\cdot\|_{H^s_{per}}} = H^s_{per}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Ver página 10 de [15]. $\square$

Proposición 7. *Sea: s, r tal que: $s \geq r$, entonces: $H^s_{per} \hookrightarrow H^r_{per}$, i.e. H^s_{per} está inmerso continuamente y densamente en: H^r_{per} y*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s, \ \forall\, f \in H^s_{per}.$$

En particular, tenemos que si $s \geq 0$, entonces:

$$H^s_{per} \subset L^2([-\pi\,, \pi]).$$

Además, vale la identificación isométricamente isomorfo

$$H^s_{per} \equiv H^{-s}_{per}, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

donde la dualidad es implementada por el par:

$$< f\,,\, g >= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\,\hat{g}(k),\, \forall\, f\, \in H^{-s}_{per},\; g \in H^s_{per}. \tag{1.13}$$

Demostración. Se tiene que $1 \leq (1+k^2)$ entonces se cumple $(1+k^2)^r \leq (1+k^2)^s$ si $r \leq s$, y de esto se obtiene

$$0 \leq \frac{(1+k^2)^r}{(1+k^2)^s} \leq 1 \quad \text{si} \quad r \leq s. \tag{1.14}$$

Ahora, usando (1.14) tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (1+|k|^2)^r |\widehat{f}(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \underbrace{\frac{(1+|k|^2)^r}{(1+|k|^2)^s}}_{\leq 1} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty. \end{aligned} \tag{1.15}$$

siempre que $f \in H^s_{per}$ y multiplicando por: 2π a ambos lados de la desigualdad (1.14) obtenemos que: $f \in H^r_{per}$ si $f \in H^s_{per}(i.e.\, H^s_{per} \subset H^r_{per})$, además:

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s$$

con esto se ha probado la inclusión continua. A seguir, probaremos que la inclusión es densa, i.e. $\overline{H}^s_{per} = H^r_{per}$. En efecto, basta mostrar que $H^r_{per} \subset \overline{H}^s_{per}$.
Sea: $g \in H^r_{per}$. Entonces, usando la densidad de $\mathcal{P}$ en H^r_{per} tenemos que existe $g_n \in \mathcal{P}$ tal que $g_n \to g$ en H^r_{per}. Como también $P \subset H^s_{per}$ entonces $g_n \in H^s_{per}$ y $g_n \to g$ en la norma $||.||_r$ en consecuencia $g \in \overline{H}^s_{per}$.
Si $f \in H^{-s}_{per}$ la igualdad (1.13) nos permite definir L_f como: $L_f(g) = \langle f, g\rangle, \forall g \in H^s_{per}$. Esta L_f es un funcional continuo en: H^s_{per}. Esto es, L_f es lineal con $\|L_f\| \leq \|f\|_{-s}$ i.e. $L_f \in (H^s_{per})'$. Sea $\psi \in (H^s_{per})'$. Utilizando el teorema de representación de Riesz, tenemos que: $\exists! \phi \in H^s_{per}$ tal que:

$$\|\phi\|_s = \|\psi\| \tag{1.16}$$

y

$$\langle \psi, g\rangle = \langle g, \phi\rangle_s, \forall g \in H^s_{per} \tag{1.17}$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \widehat{g}(k)\overline{(1+|k|^2)^s \widehat{\phi}(k)} \tag{1.18}$$

sabemos que: $\phi \in H^s_{per}$ entonces

$$((1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{\phi}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2 \tag{1.19}$$

Si definimos como

$$\widehat{f}(k) := \overline{(1+|k|^2)^s \widehat{\phi}(k)}, \forall k \in \mathbb{Z} \tag{1.20}$$

vemos que: $f \in H_{per}^{-s}$. En efecto de la definición de $\widehat{f}(k)$, (1.18) y (1.20) se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (1+|k|^2)^{-s} |\widehat{f}(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (1+|k|^2)^{-s} \left| \overline{(1+|k|^2)^s \widehat{\phi}(k)} \right|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (1+|k|^2)^{s} |\widehat{\phi}(k)|^2 < \infty \end{aligned} \tag{1.21}$$

De (1.18) tenemos que existe: $f \in H_{per}^{-s}$ tal que:

$$\begin{aligned} \langle \psi, g \rangle &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \widehat{g}(k) \widehat{f}(k) \\ &= \langle f, g \rangle, \forall g \in H_{per}^s \end{aligned} \tag{1.22}$$

De (1.21) y (1.16) tenemos que

$$\|f\|_{-s}^2 = \|\phi\|_s^2 = \|\psi\|^2$$

de donde concluimos que: $\|f\|_{-s} = \|\psi\|$. Esto es $(H_{per}^s)'$ es isométricamente isomorfo a H_{per}^{-s}. □

Teorema 8. *Si $s > \frac{1}{2}$ entonces se verifican.*

1. *La serie de Fourier de $f \in H_{per}^s$ converge absoluta y uniformemente en: $[-\pi\ ,\ \pi]$, i.e., la serie de Fourier de f*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}$$

converge absolutamente y uniformemente en $[-\pi\ ,\ \pi]$.

2. *Lema de inmersión de Sobolev: $H_{per}^s \hookrightarrow C_{per}$ y hace corresponder a $f \in H_{per}^s$ la función $g \in C_{per}$, donde $g(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}$ y satisface*

$$\|g\|_\infty \leq \|f\|_{l^1} \leq C\|f\|_s,\ \forall\, f \in H_{per}^s. \tag{1.23}$$

Demostración. Ver página 204 en [6]. □

Definición 16. *Sea $f, g \in H_{per}^s$ con $s > \frac{1}{2}$ debido al lema de inmersión de Sobolev podemos definir el producto de f con g por:*

$$< fg, \phi >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \phi(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{P}.$$

Vemos que $f, g \in C_{per} \subset \mathcal{P}'$ y se prueba que con este producto H_{per}^s es un álgebra de Banach siempre que: $s > \frac{1}{2}$.

Teorema 9. *Si $s > \frac{1}{2}$, entonces H_{per}^s es un álgebra de Banach. En particular, existe una constante positiva dependiendo únicamente de s, tal que:*

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s, \forall f, g \in H_{per}^s.$$

Demostración. Ver página 207 de [6]. □

1.5 Espacios y Operadores

En esta sección daremos las nociones de semigrupos y grupos unitarios de operadores sobre espacios de Banach. Estos operadores son muy útiles al resolver el problema de Cauchy (PVI) abstracto de tipo periódico. Una descripción mas detallada de algunos contenidos de esta sección puede consultarse en [10,11,12,16].

Definición 17. Un álgebra de Banach es un espacio de Banach X, con un producto $(x, y) \in X \times X \to xy \in X$ tal que, $\forall x, y, z \in X$ y $\forall r \in Z$ la siguiente afirmación es válida:

(a) $(xy)z = x(yz)$,

(b) $r(xy) = (rx)y = x(ry)$,

(c) $(x + y)z = xz + yz$,

(d) $\|xy\|_X \leq \|x\|_X \|y\|_X$.

Definición 18. Sea X un espacio de Banach. Un semigrupo paramétrico fuertemente continuo en X (o simplemente un semigrupo de clase C_0) es una aplicación $S : [0, \infty) \to L(X)$ tal que.

1. $S(0) = I$ donde I es el operador identidad en $L(X)$,
2. $S(t + r) = S(t)S(r), \forall t, r \in (0, \infty)$,
3. $\underset{t\to 0^+}{lim} \|S(t)\phi - \phi\| = 0, \forall \phi \in X$,

y será denotado por: $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Observación 12. *Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de clase C_0 entonces satisface:*

$$\lim_{t\to r} \|S(t)\phi - S(r)\phi\| = 0, \forall r \in [0, \infty), \forall \phi \in X,$$

esto es, la aplicación de $[0, \infty)$ a X enviando t a $S(t)\phi$ es continuo.

Definición 19. Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de clase C_0 y satisface:

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq 1, \forall t \in [0, \infty)$$

entonces diremos que el semigrupo de clase C_0 es de contracción.

Definición 20. *Sea $H_j, j = 1, 2$ espacios de Hilbert. Un operador $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ es una isometría si $\|Th\|_{H_1} = \|h\|_{H_2}$ para todo $h \in H_1$ (en particular T es inyectiva). T es unitario si es una isometría sobre H_2.*

Definición 21. *Sea H un espacio de Hilbert. Un grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo en H es un mapeo $t \in \mathbb{R} \to T(t) \in \mathcal{B}(H)$ tal que:*

(a) *$T(t)$ es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$,*

(b) *$T(t + t') = T(t)T(t'), \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}$,*

(c) $\underset{t\to t'}{lim} \|T(t)\phi - T(t')\phi\|_H = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Note que tomando $t = t' = 0$ en (b) concluimos que $T(0) = I$. Es decir, un grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo es en particular un C_0 semigrupo

1.6 Un Cálculo Funcional

En esta sección introducimos un cálculo funcional asociado con el operador $D = \frac{1}{i}\partial_x$, esto es, construiremos funciones de D. La idea es exactamente el mismo que el empleado en la definición de funciones de un operador auto-adjuntado en espacios vectoriales de dimensione finita. Sea X un espacio vectorial N-dimensional complejo con producto interno $\langle\ ,\ \rangle_X$. Si $A : X \to X$ es un operador auto-adjunto, el teorema espectral garantiza la existencia de un conjunto ortonormal completo de autovectores de A, esto es, una colección $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \subset X$, tal que:

$$Ax_k = \lambda_k x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad \langle x_k, x_j\rangle = \delta_{kj}$$

y cualquier vector $x \in X$ puede ser escrito únicamente en la forma:

$$x = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \widehat{x}(k) x_k,$$

donde:

$$k \in \{1, 2, \ldots, N\} \to \widehat{x}(k) = \langle x, x_k\rangle_X \in \mathbb{C}$$

es la trasformada de Fourier de x con respecto al conjunto ortonormal $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Si $q : \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\} \to \mathbb{C}$, nosotros ponemos

$$q(A)x = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} q(\lambda_k)\langle x, x_k\rangle_X x_k.$$

En particular, el operador de identidad en X y el mismo A se pueden escribir como funciones de A, eligiendo $q(\lambda_k) = 1$ y $q(\lambda_k) = \lambda_k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ respectivamente. Aunque no estamos en condiciones de discutir el auto-adjunto de D en este punto, tenemos un conjunto completo de autofunciones a nuestra disposición. En efecto, la colección:

$$\widetilde{\Theta}_k = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Theta_k = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ikx}, \text{ donde, } \Theta_k(x) = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z} \tag{1.24}$$

es tal conjunto en el siguiente sentido. Estas funciones satisfacen

$$\begin{aligned} D\widetilde{\Theta}_k &= \frac{1}{i}\partial_x \widetilde{\Theta}_k = \frac{1}{i}\partial_x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right) \\ &= \frac{1}{i}\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} = k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} \\ &= k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Theta_k = k\widetilde{\Theta}_k \end{aligned}$$

luego

$$D\widetilde{\Theta}_k = k\widetilde{\Theta}_k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

y

$$f = \sqrt{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \widehat{f}(k)\widetilde{\Theta}_k, \ \forall f \in \mathcal{P}'$$

donde esta serie converge en $\mathcal{P}'$ (y en H^s_{per} cuando $f \in H^s_{per}$). Además, este conjunto de funciones es ortonormal con respecto al producto interno de L^2.

$$\left\langle \widetilde{\Theta}_k, \widetilde{\Theta}_j \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\Theta}_k(x)\overline{\widetilde{\Theta}_j(x)}dx = \delta_{kj},\ \forall k, j \in \mathbb{Z}.$$

En particular, la serie de Fourier de $f \in \mathcal{P}'$ puede considerarse como una expansión de f en términos de autofunciones de D que pertenecen al valor propio k.
En el caso finito dimensional no hay restricciones en la función q. Sin embargo, en el caso de D, la suma finita será reemplazada por una serie infinita, por lo que debemos especificar una clase admisible de funciones para asegurar la convergencia. Esto no es difícil de hacer. Tenga en cuenta que si $f \in \mathcal{P}'$ y $q \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|q(k)| \leq C|k|^N \text{ y } |\widehat{f}(k)| \leq |k|^{N'}, \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{1.25}$$

resulta que:

$$\left|q(k)\widehat{f}(k)\right| \leq CC'|k|^{N+N'}, \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Así $q\widehat{f} = \left(q(k)\widehat{f}(k)\right)_{k=-\infty}^{\infty} \in S'(\mathbb{Z})$. Gracias a esto podemos definir $q(D)$.

Definición 22. *Si $q \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ y $f \in \mathcal{P}'$, entonces $q\widehat{f} = (q(k)\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. Definimos*

$$q(D)f = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} q(k)\widehat{f}(k)e^{ik(.)}, \forall f \in \mathcal{P}', D = \frac{1}{i}\partial_x,$$

donde la serie converge en $\mathcal{P}'$. Note que también podemos escribir asi

$$q(D)f = \left(q(.)\widehat{f}(.)\right)^{\vee} = q^{\vee} * f,\ \forall f \in \mathcal{P}'.$$

El mapeo $q \to q(D)$ tiene las siguientes propiedades.

Proposición 8. *Sea $q \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$. Entonces $q(D)$ es un operador lineal y continuo de $\mathcal{P}'$ en si mismo. Además,*

$$(q_1 + \lambda q_2)(D) = q_1(D) + \lambda q_2(D)$$
$$(q_1 q_2)(D) = q_1(D) q_2(D).$$

Demostración. Veamos primero la linealidad. Sea $f \in \mathcal{P}'$, entonces

$$\begin{aligned}(q_1 + \lambda q_2)(D)f &= (q_1 + \lambda q_2)^{\vee} * f \\ &= (q_1^{\vee} + \lambda q_2^{\vee}) * f \\ &= q_1^{\vee} * f + \lambda q_2^{\vee} * f \\ &= q_1(D)f + \lambda q_2(D)f \\ &= (q_1(D) + \lambda q_2(D))f\end{aligned}$$

en consecuencia:

$$(q_1 + \lambda q_2)(D) = q_1(D) + \lambda q_2(D).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(q_1q_2)(D)f &= (q_1q_2)^{\vee} * f\\ &= (q_1^{\vee} * q_2^{\vee}) * f\\ &= q_1^{\vee} * (q_2^{\vee} * f)\\ &= q_1^{\vee} * (q(D)f)\\ &= q_1(D)(q_2(D)f)\\ &= [q_1(D)q_2(D)]f\end{aligned}$$

luego

$$(q_1q_2)(D) = q_1(D)q_2(D).$$

□

Es natural preguntarse acerca del comportamiento de $q(D)$ en H^s_{per}. En general, no se tiene $q(D)(H^s_{per}) \subseteq H^s_{per}$. En efecto, D mismo mapea H^s_{per} en H^{s-1}_{per} y es fácil verificar que $Df \in H^s_{per}$ si y solo si $f \in H^{s+1}_{per}$.

Proposición 9. *Sea $q \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ satisfaciendo la condición (1.25). Entonces: $q(D) \in \mathcal{B}(H^s_{per}, H^{s-N}_{per})$ y satisface*

$$||q(D)f||_{s-N} \leq C||f||_s.$$

Demostración. Nosotros tenemos:

$$\begin{aligned}\|q(D)f\|^2_{s-N} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (1+k^2)^{s-N} \left|q(k)\widehat{f}(k)\right|^2\\ &\leq C \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (1+k^2)^{s-N}|k|^N|\widehat{f}(k)|^2\\ &\leq C \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (1+k^2)^{s}|\widehat{f}(k)|^2 = C||f||^2_s, \forall f \in H^s_{per}.\end{aligned}$$

□

1.7 El problema de Cauchy periódico

En los capítulos siguientes desarrollaremos tres ecuaciones lineales homogéneas de evolución. Una descripción mas detallada de algunos contenidos puede consultarse en [6,7,9,11,12].

Consideremos el Problema de Cauchy periódico, es decir, de la siguiente forma:

Sea $q = (q(k))^{\infty}_{k=-\infty} \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ de valores reales, y

$$q(D)f = \left(q(\cdot)\widehat{f}(\cdot)\right)^{\vee}, \; f \in \mathcal{P}'. \tag{1.26}$$

Sea $\mu \geq 0$ y $s \in \mathbb{R}$ fijo. Se tiene el problema de Cauchy periódico en el espacio de Sobolev dado:

$$\left|\begin{array}{l} v \in C([0,+\infty\rangle, H^s_{per}),\\ \partial_t v + iq(D)v = \mu\partial^2_x v,\\ v(0) = \phi \in H^s_{per}.\end{array}\right. \tag{1.27}$$

Se prueba que dicha ecuación esta bien puesta. mas precisamente, que tiene una única solución y que dicha solución depende continuamente del dato inicial. Nuestro enfoque es considerar la ecuación diferencial parcial en (1.27) como una ecuación diferencial ordinaria en los espacios de Banach apropiados. Como se observa, se necesitan al menos dos de estos espacios en general; uno donde vive la solución y otro para acomodar la derivada del tiempo. Note que el problema de Cauchy (1.27) contiene un gran número de importantes ecuaciones periódicas. En efecto, si $q = 0$ y $\mu > 0$, tenemos la ecuación del calor mientras que si $q(k) = k^2$ y $q(k) = -k^3$ con $\mu = 0$, conducen a la ecuación lineal de Schrodinger y de Korteweg-de Vries respectivamente. En la ecuación lineal homogénea de Kuramoto-Sivashinsky, motivo de la tesis, se tiene $q(k) = k^3 - \beta(k^4 - k^2)$ y $\mu = 0$.
Nuestra primera tarea es aclarar el significado de la derivada en el tiempo en (1.27). De la proposición 9, se tiene que $q(D)) \in \mathcal{B}(H^s_{per}, H^{s-N}_{per})$ y $\partial_x^2 = -D^2 \in (H^s_{per}, H^{s-2}_{per})$. En consecuencia,

$$(\mu\partial_x^2 - iq(D))f \in H^\theta_{per},\ \theta = min\,\{s-N, s-2\}\ \ \forall f \in H^\theta_{per}. \tag{1.28}$$

Así que, si v es una solución de (1.27), debemos tener $\partial_t v(t) \in H^\theta_{per}$, $\theta = min\,\{s-N, s-2\}$. Por lo tanto, es natural requerir que la derivada en el tiempo exista en esta topología, es decir,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - (\mu\partial_x^2 - iq(D))v(t)\right\|_\theta = 0. \tag{1.29}$$

Observación 13. *El cálculo funcional sera utilizado para probar, mas adelante, el buen planteamiento de la solución del problema de Cauchy de la ecuación KdV-Kuramoto-Sivashinsky vía semigrupos. Pero antes utilizaremos estos resultados en la solución del problema de Cauchy de dos ecuaciones lineales homogéneas de evolución, como son, la ecuación del calor y la ecuación de la onda, usando solamente la transformada de Fourier, estimativas y propiedades de los espacios de Sobolev. Además en el caso de la ecuación del calor daremos una version usando semigrupos.*

2 Dos Ecuaciones Lineales de Evolución

En este capítulo, siguiendo las ideas de [6,14,15], aplicaremos los métodos que usaremos en el estudio de la ecuación de KdV-Kuramoto-Sivashinsky, a la ecuación del calor y de la onda. En el primera sección usamos la transformada de Fourier, estimativas de los espacios de Sobolev periódico y luego el método de los semigrupos para obtener la buena colocación del problema del calor.

2.1 Existencia y unicidad de la ecuación del calor en H^s_{per}

Discutiremos ahora el problema de Cauchy para la ecuación unidimensional, lineal y homogénea del calor, en el espacio de Sobolev periódico dado. Primero de forma intuitiva, es decir, obtendremos formalmente la solución vía la transformada de Fourier y luego se prueba en detalle que efectivamente es solución del problema de Cauchy. Esta ecuación se obtiene de (1.27), haciendo $q = 0$, $\mu = 1$ y debe satisfacer (1.28) y (1.29)

Teorema 10. *Sea s fijo, y la ecuación:*

$$(L)\left|\begin{array}{l} u \in C([0, +\infty\rangle, H^s_{per}) \\ \partial_t u(t) = \partial_x^2 u(t) \in H^{s-2}_{per}, \\ u(0) = \phi \in H^s_{per}. \end{array}\right.$$

Entonces (L) *posee una única solución* $u \in C([0, \infty\rangle, H^s_{per})$*, el cual depende continuamente del dato inicial.*

Demostración. Hemos organizado la prueba de la siguiente forma:

1. Primero obtenemos, formalmente, el candidato a la solución. En efecto, supongamos que u es una solución de (L). Entonces tomamos la transformada de Fourier a la ecuación:
$$\partial_t u(t) = \partial_x^2 u(t)$$
la cual debe satisfacer
$$(L_k)\left|\begin{array}{l} \widehat{u} \in C([0, +\infty\rangle, l^2_s(\mathbb{Z})), \\ \partial_t \widehat{u}(t) = -k^2 \widehat{u}(t), \\ \widehat{u}(0) = \widehat{\phi} \in H^s_{per}. \end{array}\right.$$
Donde $\widehat{u}(k) = (u(t, \cdot))^\wedge(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Este es un sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya solución es:
$$\widehat{u} = e^{-k^2 t}\widehat{\phi},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ t \in [0, \infty),$$

se deduce que la solución, si existe, debe ser:

$$\begin{aligned}
u(t) &= \left\{e^{-k^2t}\widehat{\phi}(\cdot)\right\}^{\vee}, \forall t \in [0,\infty) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{u}(k)\phi_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}\widehat{\phi}(k)\phi_k \\
u(t,x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}\widehat{\phi}(k)\phi_k(x), \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

donde $\phi_k(x) = e^{ikx}$ con $|\phi_k| = 1$.

2. En segundo lugar, probaremos que $u(t) \in H^s_{per}$.
Sea $t > 0, \phi \in H^s_{per}$, y como $|e^{-k^2t}| < 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{H^s} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s|\widehat{u}|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s|e^{-k^2t^2}\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s e^{-2k^2t^2}|\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 = \|\phi\|^2_{H^s} < \infty, \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

entonces

$$u(t) \in H^s_{per}.$$

3. Ahora, probaremos que $u(t)$ es continua

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(t')\|^2_{H^s} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|e^{-k^2t}\widehat{\phi}(k) - e^{-k^2t'}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \left|\underbrace{e^{-k^2t} - e^{-k^2t'}}_{H(t):=}\right|^2. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Se observa que $\lim_{t\to t'} H(t) = 0$. Ahora necesitamos la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para esto, tomamos el k-ésimo término de la serie (2.3) y lo mayoramos por una serie convergente, es decir,

$$\begin{aligned}
I_{k,t} &= 2\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2|H(t)|^2 \\
&\leq 4\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad triangular (propiedad de la norma) y el hecho de que $e^{-k^2t} < 1$ en consecuencia

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{k,t} \leq 2\|\phi\|^2_{H^s},$$

entonces, por el M-test de Weierstrass la serie (2.3) converge absoluta y uniformemente a una función continua en t, luego podemos intercambiar el límite y, en consecuencia

$$\lim_{t\to t'} \|u(t)-u(t')\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{t\to t'} I_{k,t} = 0,$$

es decir $u(t)$ es continua en t.

4. Seguidamente probaremos que la derivada satisface la ecuación:

$$\partial_t u(t) = \partial_x^2 u(t)$$

dicha derivada se calcula en la topología de H^{s-2}_{per}, es decir,

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \partial_x^2 u(t) \right\|^2_{H^{s-2}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad h\to 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \partial_x^2 u(t) \right\|^2_{H^{s-2}} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-2} \left| \left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right)^{\wedge}(k) - (\partial_x^2 u(t))^{\wedge}(k) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-2} |\widehat{\phi}(k)|^2 \left| \left(\frac{e^{-k^2(t+h)} - e^{-k^2 t}}{h}\right) + k^2 e^{-k^2 t} \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-2} |\widehat{\phi}(k)|^2 e^{-2k^2 t} \left| \underbrace{\frac{e^{-2k^2 h}-1}{h} + k^2}_{M(h):=} \right|^2 .
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Aplicando L'Hospital se observa que $\lim_{h\to 0} M(h) = 0$. Necesitamos la convergencia uniforme para intercambiar los límites. Para esto mayoramos el k-ésimo término de la serie (2.4)

$$I_{k,h} = 2\pi(1+k^2)^{s-2}|\widehat{\phi}(k)|^2 e^{-2k^2 t} \left| \frac{e^{-2k^2 h}-1}{h} + k^2 \right|^2 .$$

Observemos que si $h>0$:

$$\frac{e^{-k^2 h}-1}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial}{\partial s}(e^{-k^2 s}-1)ds = \int_0^h \frac{1}{h}(-k^2 e^{-k^2 s})ds$$

luego

$$\left| \frac{e^{-k^2 h}-1}{h} \right| \leq \int_0^h \frac{1}{h}|k|^2 ds = \frac{1}{h}|k|^2 s \Big|_0^h = |k|^2.$$

Entonces:

$$\left|\frac{e^{-k^2h}-1}{h}+k^2\right|^2 \leq 4|k|^4, \quad h>0. \tag{2.5}$$

Ahora, considerando $h<0$ tal que $-\frac{t}{2}<h<0$ y de esto se tiene $0<\frac{t}{2}+h<\frac{t}{2}$. Luego, aplicando el teorema del valor medio a

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-k^2(t+h)}-e^{-k^2t}}{h}\right| &= e^{-k^2\frac{t}{2}}\left|\frac{e^{-k^2(\frac{t}{2}+h)}-e^{-k^2\frac{t}{2}}}{h}\right| \\ &\leq e^{-k^2\frac{t}{2}}\left|-k^2e^{-k^2c}\right| \\ &\leq |k|^2, \text{ donde } c\in(\frac{t}{2}+h,\frac{t}{2}), h<0\end{aligned}$$

usando esta estimativa en (2.4) obtenemos:

$$\left|\left|\frac{e^{-k^2(t+h)}-e^{-k^2t}}{h}\right|+k^2e^{-k^2t}\right| \leq k^2+k^2=2k^2, \tag{2.6}$$

donde hemos usado la desigualdad triangular, también el hecho de que $e^{\theta}\leq 1$, cuando, $\theta<0$, luego, teniendo en cuenta (2.5) y (2.6) pasamos a mayorar el k-ésimo término de la serie (2.4)

$$\begin{aligned}I_{k,h} &= 2\pi\,(1+k^2)^{s-2}|\widehat{\phi}(k)|^2e^{-2k^2t}\left|\frac{e^{-k^2h}-1}{h}+k^2\right|^2 \\ &\leq 2\pi(1+k^2)^{s-2}|\widehat{\phi}(k)|^2|M(h)|^2 \\ &\leq 8\pi(1+k^2)^{s-2}|\widehat{\phi}(k)|^2k^4 \\ &\leq 8\pi(1+k^2)^{s}(1+k^2)^{-2}(1+|k|^2)^2|\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &= 8\pi(1+|k|^2)^{s}|\widehat{\phi}(k)|^2\end{aligned}$$

en consecuencia:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{k,h} \leq 4\|\phi\|^2_{H^s}<\infty, \quad \text{pues, } \phi\in H^s_{per}.$$

Luego por el M-test de Weierstrass la serie (2.4) converge absoluta y uniformemente a una función continua en h, y por lo tanto es posible intercambiar los límites.

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-\partial_x^2u(t)\right\|^2_{H^s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0} I_{k,h}=0.$$

5. Obtendremos la dependencia continua de los datos iniciales, es decir, si ϕ_1 y ϕ_2 son datos próximos en H^s. Probaremos que sus correspondientes soluciones u_1 y

u_2 están próximos en el espacio solución dado. En efecto, veamos que para cada $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s}^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|\widehat{u_1}(k) - \widehat{u_2}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|e^{-k^2 t}\widehat{\phi_1}(k) - e^{-k^2 t}\widehat{\phi_2}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s e^{-2k^2 t} \left|\widehat{\phi_1}(k) - \widehat{\phi_2}(k)\right|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|\widehat{\phi_1}(k) - \widehat{\phi_2}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|(\phi_1 - \phi_2)^\wedge(k)\right|^2 \\
&= \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s}^2 .
\end{aligned}
$$

En consecuencia:

$$\underset{t\in\mathbb{R}}{sup}\|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s},$$

luego si $\phi_1 \to \phi_2$ se tiene que $u_1 \to u_2$.

6. Finalmente probaremos la unicidad de la solución. La desigualdad anterior nos permitirá mostrar que la solución es única. En efecto sea $\phi \in H^s_{per}$ y supongamos que existan u_1 y u_2 dos soluciones, entonces usando el item anterior 5 tenemos,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s} \leq \underset{t\in\mathbb{R}}{sup}\|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s} \leq \|\phi - \phi\|_{H^s} = 0,$$

de donde concluimos que $u_1 = u_2$.

□

2.1.1 Enfoque vía Semigrupos

Ahora daremos un enfoque vía semigrupos del teorema anterior 10. Para esto introducimos una familia de operadores lineales el cual verifica la condición de ser un semigrupo de contracción de clase C_0 los cuales nos ayudaran a determinar la existencia y unicidad de la solución de la ecuación del calor.
Consideremos el problema de Cauchy asociado a la ecuación del calor trabajado anteriormente

$$(L)\left|\begin{array}{l} v \in C([0,\infty), H^s_{per}) \\ \partial_t v(t) = \partial_x^2 v(t) \\ v(0) = \phi \in H^s_{per}. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Mostraremos que la ecuación esta bien puesto, esto es, probaremos que tiene solución única que depende continuamente de los datos iniciales. Repitiendo los pasos anteriores se puede probar la existencia y unicidad con ayuda de la transformada de Fourier.
En efecto, asumiendo que v es solución, entonces tomando la transformada de Fourier

a la ecuación (2.7), $\widehat{v}(t) = (v(t, \cdot))^\wedge$ debe satisfacer

$$(L_k) \left| \begin{array}{l} \widehat{v} \in C([0,\infty), l^2(\mathbb{Z})) \\ \partial_t \widehat{v}(t) = -k^2 \widehat{v}(t) \\ \widehat{v}(0) = \widehat{\phi} \in H^s_{per} \end{array} \right. \tag{2.8}$$

donde $\widehat{v}(t) = (v(t, \cdot))^\wedge(k), \forall k \in \mathbb{Z}$. Este es un sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya solución es

$$\widehat{v}(t) = e^{-k^2 t}\widehat{\phi}(k), \forall k \in \mathbb{Z}, t \in [0, \infty)$$

de esto se deduce que si la solución existe, debe ser

$$v(t) = \{e^{-k^2 t}\widehat{\phi}(k)\}^\vee, \forall t \in [0, \infty). \tag{2.9}$$

Ahora usamos la teoría expuesta en el capítulo (1), sección (1.7) para la sucesión $q(k) = -k^2, k \in \mathbb{Z}$, el operador $D = \frac{1}{i}\partial x$ y la definición 22 tenemos

$$q(D)f = (q(k)\widehat{f}(\cdot))^\vee = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(k)\widehat{f}(k)e^{ik(\cdot)}$$

$$v(t)f = e^{-k^2 t} f$$

donde $f \in \mathcal{P}'$. Entonces(2.8) se puede escribir como el problema de Cauchy abstracto.

$$(L_*) \left| \begin{array}{l} v \in C([0,\infty), H^s_{per}) \\ \partial_t v = q(D)v \in H^{s-2}_{per} \\ v(0) = \phi \in H^s_{per} \end{array} \right. \tag{2.10}$$

y (2.9) se convierte en

$$v(t) = e^{\partial_x^2 t}\phi.$$

Ahora estamos en condiciones de estudiar (2.10) dentro del marco teórico de los semigrupos, empezando con su propiedad de continuidad.

Teorema 11. *Sea la aplicación $S : [0, \infty) \to L(H^s_{per})$, que asigna a t el operador $S(t) = e^{\partial_x^2 t}$, es decir, aplica $S(t)\phi = \{e^{-k^2 t}\widehat{\phi}(k)\}^\vee$, entonces, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de clase C_0 de contracción en $H^s_{per}, \forall s \in \mathbb{R}$. Además las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *$S(\cdot)\phi \in C([0, \infty), H^s_{per})$*

2. *La aplicación $\phi \to S(\cdot)\phi$ es continua y verifica:*

$$\|S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall t > 0$$

y

$$\sup_{t \geq 0} ||S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2||_{H^s_{per}} \leq ||\phi_1 - \phi_2||_{H^s_{per}}.$$

Demostración. La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

1. Primero observemos que

$$S(0)\phi = \{e^{\partial_x^2(0)}\widehat{\phi}(k)\}^{\vee} = \{\widehat{\phi}(k)\}^{\vee} = \phi, \forall \phi \in H^s_{per},$$

así $S(0) = I$. De la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier y de su inversa, se deduce que $S(t)$ es lineal, es decir, $S(t) \in L(H^s_{per})$

2. Probaremos que $S(t)\phi \in H^s_{per}$ y $||S(t)\phi||_s \leq |||\phi||_s$, esto es, $||S(t)|| \leq 1$.
En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned} \|S(t)\phi\|^2_{per} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |e^{-k^2 t}\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 e^{-2k^2 t} \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 = \|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Luego $S(t)\phi \in H^s_{per}$ y $||S(t)\phi||_s \leq ||\phi||_s$, esto es, $S(t) \in L(H^s_{per})$ con $||S(t)|| \leq 1$.

3. Ahora, probaremos que $S(t+r) = S(t)S(r), \forall t, r \geq 0$

$$\begin{aligned} S(t+r)f(x) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2(t+r)}\widehat{f}(k)e^{ikx} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t}\{e^{-k^2 r}\widehat{f}(k)\}e^{ikx} \\ &= S(t)g(x), \end{aligned}$$

donde g es tal que: $\widehat{g}(k) = e^{-k^2 r}\widehat{f}(k), \forall k \in \mathbb{Z}$. Así

$$g(x) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 r}\widehat{f}(k)e^{ikx} = S(r)f(x),$$

en consecuencia $S(t+r)f = S(t)S(r)f, \forall t, r \geq 0$.

4. Seguidamente probaremos la continuidad de: $t \to S(t)\phi$

$$\|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|_{H^s_{per}} \to 0, \text{ cuando}\,, h \to 0. \tag{2.12}$$

En efecto, usando el item 3 de la prueba del teorema anterior, para $t \geq 0$ fijo y

$h > 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&\|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} \\
&\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|(e^{-k^2(t+h)} - e^{-k^2t})\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|e^{-k^2t}(e^{-k^2h} - 1)\right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |e^{-2k^2t}| \left|e^{-k^2h} - 1\right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Desde que $\phi \in H^s_{per}$, entonces el término $I_{k,h}$ de (2.13) se acota como:

$$\begin{aligned}
I_{k,h} &= 2\pi(1+k^2)^s|e^{-2k^2t}| \left|e^{-k^2h} - 1\right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\leq 8\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2
\end{aligned}$$

en consecuencia,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,h} \leq 4||\phi||^2_s, \text{ pues } \phi \in H^s_{per},$$

luego por el M-test de Weierstrass la serie (2.13) converge absoluta y uniformemente a una función continua en h y podemos intercambiar los límites y obtenemos:

$$\lim_{h\to 0^+} \|S(t+h)\phi - S(t\phi)\|_s = 0. \qquad (2.14)$$

Ahora, consideremos el límite izquierdo.
Sea $t > 0$ fijo y $h < 0$, tal que, $0 < \frac{t}{2} + h < t/2$ luego:

$$\begin{aligned}
&\|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|^2_s \\
&\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|e^{-k^2(t+h)} - e^{-k^2t}\right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |e^{-k^2t/2}|^2 \left|e^{-k^2(\frac{t}{2}+h)} - e^{-k^2\frac{t}{2}}\right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

en consecuencia, el término $I_{k,h}$ de la serie (2.15) está acotada

$$\begin{aligned}
I_{k,h} &= 2\pi(1+k^2)^s|e^{-k^2t/2}|^2 \left|e^{-k^2(\frac{t}{2}+h)} - e^{-k^2(\frac{t}{2})}\right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\leq 8\pi(1+k^2)^2|\widehat{\phi}(k)|^2
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,h} \leq 4||\phi||^2_s < \infty$$

luego por el M-test de Weierstrass la serie (2.15) converge absoluta y uniformemente hacia una función continua en h y podemos intercambiar los límites, obteniendo el limite izquierdo

$$\lim_{h\to 0^-} \|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|_s^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{h\to 0^-} I_{k,h} = 0 \tag{2.16}$$

luego de (2.14) y (2.16) se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \|S(t+h) - S(t)\|_{H^s_{per}} = 0$$

□

Observación 14. *Tenemos que* $\displaystyle \lim_{t\to 0^+} ||S(t)\phi - \phi||_{H^s_{per}} = 0.$

Observación 15. *Con la observación anterior* 15 *tenemos que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo de contracción de clase* C_0 *en* H^s_{per}. *Sean* ϕ_1 *y* ϕ_2 *datos cercanos en* H^s_{per}*, entonces, probaremos que sus correspondientes* $S(\cdot)\phi_1$ *y* $S(\cdot)\phi_2$ *respectivamente, son cercanos. En efecto, desde que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es una contracción para* $t \geq 0$*, tenemos:*

$$\|S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} = \|S(t)[\phi_1 - \phi_2]\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}$$

tomando supremo sobre $t \in [0, \infty)$ *obtenemos*

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}} \tag{2.17}$$

de modo que si $\phi_1 \to \phi_2$*, entonces* $S(\cdot)\phi_1 \to S(\cdot)\phi_2$.

Ahora veamos la diferenciabilidad en la topología de H^{s-2}_{per}

Teorema 12. *Se cumple:*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - q(D)v(t) \right\|_{s-2} = 0 \tag{2.18}$$

converge uniformemente respecto a $t \geq 0$.

Demostración. Sea $t \geq 0$ fijo. Entonces para $h > 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} &\left\| \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - q(D)v(t) \right\|^2_{s-2} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left| \frac{e^{-k^2(t+h)} - e^{-k^2 t}}{h} + k^2 e^{-k^2 t} \right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} |e^{-2k^2 t}| \left| \frac{e^{-k^2 h} - 1}{h} + k^2 \right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Se observa que:

$$\lim_{h\to 0^+} \left| \frac{e^{-k^2 h} - 1}{h} + k^2 \right| = |-k^2 + k^2| = 0,$$

entonces necesitamos acotar el término $I_{k,h}$ de la serie (2.19) donde:

$$I_{k,h} = (1+k^2)^{s-2}|e^{-2k^2t}|\left|\frac{e^{-k^2h}-1}{h}-1\right|^2|\widehat{\phi}(k)|^2. \tag{2.20}$$

Ahora bien aplicando el teorema del valor medio sobre el intervalo $[0,h]$ obtenemos

$$\left|\frac{e^{-k^2h}-1}{h}\right| \leq |k^2e^{-k^2c}| \leq |k|^2$$

donde $c \in (0,h)$ luego mayoramos (2.20)

$$\begin{aligned}
I_{k,h} &= (1+k^2)^{s-2}|e^{-2k^2t}|\left|\frac{e^{-k^2h}-1}{h}-1\right|^2|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&\leq 4(1+k^2)^{s-2}(k^2)^2|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&\leq 4(1+k^2)^{s}(1+k^2)^{-2}(1+k^2)^2|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&= 4(1+k^2)^{s}|\widehat{\phi}(k)|^2
\end{aligned}$$

en consecuencia:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{\{k,h\}} \leq ||\phi||_s < \infty, \quad h > 0,$$

luego, usando el M-test de Weierstrass, la serie (2.19) converge converge absoluta y uniformemente hacia una función continua en $h > 0$ y podemos intercambiar los límites, es decir:

$$\lim_{h\to 0^+}\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h}-q(D)v(t)\right\|_{s-2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to 0^+} I_{\{k,h\}} = 0. \tag{2.21}$$

Ahora veamos el límite izquierdo. Similar al item 4 del teorema 10 tenemos que para $t > 0$ escogemos $h < 0$ tal que $0 < t/2 + h < t/2$ y aplicando el teorema del valor medio a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{-k^2(t+h)}-e^{-k^2t}}{h}\right| &= e^{-k^2\frac{t}{2}}\left|\frac{e^{-k^2(\frac{t}{2}+h)}-e^{-k^2\frac{t}{2}}}{h}\right|\\
&\leq e^{-k^2\frac{t}{2}}\left|-k^2e^{-k^2c}\right|\\
&\leq |k|^2, \text{ donde } c \in (\frac{t}{2}+h, \frac{t}{2}), h < 0
\end{aligned}$$

luego podemos acotar el término $I_{k,h}$ de la serie (2.19) como sigue:

$$\begin{aligned}
I_{k,h} &= (1+k^2)^{s-2}\left|\frac{e^{-k^2(t+h)}-e^{-k^2t}}{h}+k^2e^{-k^2t}\right|^2|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&= (1+k^2)^{s-2}\left|e^{-k^2t/2}\right|^2\left|\frac{e^{-k^2(t/2+h)}-e^{-k^2t/2}}{h}+k^2e^{-k^2t/2}\right|^2|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&\leq 4(1+k^2)^s(1+k^2)^{-2}|k^2|^2|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&\leq 4(1+k^2)^s(1+k^2)^{-2}(1+k^2)^2|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&= 4(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2
\end{aligned} \tag{2.22}$$

y, en consecuencia:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{\{k,h\}} \leq 2||\phi||_s < \infty, \quad h<0.$$

Luego aplicando el M-test de Weierstrass la serie (2.20) converge converge absoluta y uniformemente una función continua en $h<0$ y podemos intercambiar los límites, es decir:

$$\lim_{h\to 0^-}\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h}-q(D)v(t)\right\|_{s-2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to 0^-} I_{\{k,h\}} = 0 \tag{2.23}$$

luego de (2.21) y (2.23) obtenemos: (2.18).

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{v(t+h)-v(t)}{h}-q(D)v(t)\right\|_{s-2} = 0$$

□

En consecuencia de los teoremas (11) y (12) tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3. *El problema de Cauchy del calor* (L)

$$\left|\begin{array}{l} v\in C([0,\infty),H^s_{per})\\ \partial_t v(t) = \partial_x^2 v(t)\in H^{s-2}_{per}\\ v(0)=\phi\in H^s_{per}.\end{array}\right.$$

está bien puesto, tiene solución única que depende continuamente del dato inicial y la solución es dada por:

$$v(t) = S(t)\phi.$$

2.2 Existencia y unicidad de la ecuación de onda en H^s_{per}

Discutiremos ahora el problema de Cauchy para la ecuación homogénea y unidimensional de la onda en el espacio de Sobolev periódico dado.

Teorema 13. *Sea s fijo, probaremos que el problema:*

$$(O)\left|\begin{array}{l} u \in C([0,T], H^s_{per}) \cap C^1([0,T]; H^{s-1}_{per}) \\ \partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u(t) \\ u(0) = \phi \in H^s_{per}, \partial_t u(0) = \psi \in H^{s-1}_{per}, \end{array}\right.$$

está bien puesto, es decir, tiene una solución única que depende continuamente del dato inicial.

En este caso, la primera derivada del tiempo se calcula con respecto a la norma de H^{s-1}_{per}, mientras que el segundo se calcula en la norma de H^{s-2}_{per} .La prueba de la unicidad estará basada en el siguiente lema:

Lema 2. *Sea $w \in C([0,T]; H^s_{per}) \cap C^1([0,T]; H^{s-1}_{per})$ satisfaciendo $\partial_t^2 w(t) = c^2 \partial_x^2 w(t)$. Definimos*

$$E_s(t) = E_s(t; w) = \left\| \frac{1}{c} \partial_t w(t) \right\|^2_{s-2} + ||\partial_x^2 w(t)||,$$

entonces,

$$\partial_t E_s(t) = 0, \, \forall t \in [0,T],$$

así que

$$E_s(t) = E_s(0), \forall t \in [0,T].$$

Demostración. Las condiciones en w implican que $\partial_t^2 w(t) = c^2 \partial_x^2 w(t) \in C([0,T]; H^{s-2}_{per})$. Calculando se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_t E_s(t) &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{E_s(t+h) - S_s(t)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Bigg\{ \left\langle \frac{1}{c} \partial_t w(t+h), \frac{1}{c} \partial_t w(t+h) \right\rangle - \left\langle \frac{1}{c} \partial_t w(t), \frac{1}{c} \partial_t w(t) \right\rangle \\
&\qquad + \langle \partial_x w(t+h), \partial_x w(t+h) \rangle - \langle \partial_x w(t), \partial_x w(t) \rangle \Bigg\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Bigg\{ \left\langle \frac{1}{c} \partial_t w(t+h) - \frac{1}{c} \partial_t w(t) + \frac{1}{c} \partial_t w(t), \frac{1}{c} \partial_t w(t+h) \right\rangle \\
&\qquad - \left\langle \frac{1}{c} \partial_t w(t), \frac{1}{c} \partial_t w(t) \right\rangle + \langle \partial_x w(t+h) - \partial_x w(t) + \partial_x w(t), \partial_x w(t+h) \rangle \\
&\qquad - \langle \partial_x w(t), \partial_x w(t) \rangle \Bigg\} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Bigg\{ \left\langle \frac{1}{c} \partial_t w(t+h) - \frac{1}{c} \partial_t w(t), \frac{1}{c} \partial_t w(t+h) \right\rangle + \left\langle \frac{1}{c} \partial_t w(t), \frac{1}{c} \partial_t w(t+h) \right\rangle \\
&\qquad - \left\langle \frac{1}{c} \partial_t w(t), \frac{1}{c} \partial_t w(t) \right\rangle + \langle \partial_x w(t+h) - \partial_x w(t), \partial_x w(t+h) \rangle \\
&\qquad + \langle \partial_x w(t), \partial_x w(t+h) \rangle - (\partial_x w(t), \partial_x w(t)) \Bigg\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Bigg\{ \left\langle \frac{1}{c}\partial_t w(t+h) - \frac{1}{c}\partial_t w(t), \frac{1}{c}\partial_t w(t+h) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \frac{1}{c}\partial_t w(t+h) - \frac{1}{c}\partial_t w(t), \frac{1}{c}\partial_t w(t) \right\rangle + \langle \partial_x w(t+h) - \partial_x w(t), \partial_x w(t+h) \rangle \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \langle \partial_x w(t+h) - \partial_x w(t), \partial_x w(t) \rangle \Bigg\} \\
&= 2\left\langle \frac{1}{c}\partial w(t), \frac{1}{c}\partial_t^2 w(t) \right\rangle_{s-2} + 2\langle \partial_x w(t), \partial_t\partial_x w(t)\rangle_{s-2}
\end{aligned}
$$

desde que:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{c}\partial_t w(t) | \frac{1}{c}\partial_t^2 w(t) \right\rangle_{s-2} &= \frac{1}{c^2}\langle \partial_t w(t), \partial_t^2 w(t)\rangle = \frac{1}{c^2}\left\langle \partial_t w(t) | c^2 \partial_x^2 w(t) \right\rangle_{s-2} \\
&= \langle \partial_t w(t), \partial_x^2 w(t)\rangle
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\langle \partial_x w(t), \partial_t \partial_x w(t)\rangle &= \lim_{h\to 0}\left\langle \partial_x w(t), \frac{\partial_x w(t+h) - \partial_x w(t)}{h} \right\rangle_{s-2} \\
&= -\lim_{h\to 0}\left\langle \partial_x^2 w(t), \frac{w(t+h) - w(t)}{h} \right\rangle_{s-2} \\
&= -\langle \partial_x^2 w(t), \partial_t w(t)\rangle_{s-2}
\end{aligned}
$$

además como w es de valores reales, obtenemos el resultado:

$$
\partial_t E_s(t) = -\,2\left\langle \partial_x^2 w(t), \partial_t w(t) \right\rangle_{s-2} + 2\left\langle \partial_x^2 w(t), \partial_t w(t) \right\rangle_{s-2} = 0
$$

tomando extremos,

$$
\partial_t E_s(t) = 0,\ \forall t \in [0, T],
$$

y de esto

$$
E_s(t) = E_s(0), \forall t \in [0, T].
$$

□

Usando éste lema podemos demostrar la unicidad de la solución.

Corolario 4. *Existe a lo más una solución de la ecuación de onda* (O).

Demostración. Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones de (O), sea $w = u_1 - u_2$, entonces $w(0) = u_1(0) - u_2(0) = \phi - \phi = 0$ tomando extremos resulta $w(0) = 0$, además:

$$
\begin{aligned}
\partial_t^2 w(t) &= \partial_t^2 (u_1(t) - u_2(t)) = \partial_t^2 u_1(t) - \partial_t^2 u_2(t) \\
&= c^2\partial_x^2 u_1(t) - c^2 \partial_x^2 u_2(t) = c^2 \partial_x^2 w(t)
\end{aligned}
$$

tomando extremos $\partial_t^2 w(t) = c^2 \partial_x^2 w(t)$, y w satisface las condiciones del lema previo 2. Por lo tanto:

$$E_s(t) = E_s(0) = \left\| \frac{1}{c} \partial_t w(0) \right\|_{s-2}^2 + \|\partial_x w(0)\|_{s-2}^2 = 0$$

en consecuencia cada norma debe ser cero

$$\partial_t w(t) = \partial_x w(t) = 0, \forall t \in [0, T]$$

se deduce que w debe ser independiente de t, es decir, $w(t) = w(0) = 0 = u_1(t) - u_2(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Esto finaliza la prueba. $\square$

La solución en sí se puede obtener formalmente utilizando la transformada de Fourier. Escribiendo $\widehat{u}(t,k) = (\widehat{u(t)})$ y $\widehat{f}(t,k) = (\widehat{f(t)})(k)$ como de costumbre, obtenemos

$$(O_1) \left| \begin{array}{l} \widehat{u} \in C([0,T]; l_s^2) \\ \partial_t^2 \widehat{u}(t,k) = -c^2 k^2 \widehat{u}(t,k) \\ \widehat{u}(0) = \widehat{\phi} \in l_s^2,\ \partial_t \widehat{u}(0) = \widehat{\psi} \in l_{s-1}^2. \end{array} \right.$$

Este es un sistema homogéneo desacoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden lineal, cada uno de los cuales está provisto de un par apropiado de condiciones iniciales. Sus soluciones están dadas por:

$$\widehat{u}(t,k) = \begin{cases} (cos(c|k|t))\widehat{\phi}(k) + \frac{sen(c|k|t)}{c|k|}\widehat{\psi}(k),\ k \neq 0 \\ \widehat{\phi}(0) + t\widehat{\psi}(0),\ k = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones deben ser dadas por:

$$u(t) = \widehat{\phi}(0) + t\widehat{\psi}(0) + \sum_{k \neq 0} \widehat{u}(t,k) e^{ikx}. \tag{2.24}$$

Para reescribirlo, de forma más concisa, es conveniente introducir las siguientes funciones del operador $D = \frac{1}{i}\partial_x$.
Sea $f \in \mathcal{P}'$ y consideremos los siguientes operadores lineales:

$$C(t)f = (cos(c|D|t))f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (cos(c|k|t))\widehat{f}(k) e^{ikx}, \tag{2.25}$$

$$S(t)f = (sen(c|D|t))f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (sen(c|k|t))\widehat{f}(k) e^{ikx}, \tag{2.26}$$

$$W(t)f = \frac{S(t)}{c|D|} = \frac{sen(c|D|t)}{c|D|} f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(sen(c|k|t))}{c|k|} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \tag{2.27}$$

donde en (2.27) se estipuló:

$$\left. \frac{sen(c|k|t)}{c|k|} \right|_{k=0} = t$$

estos tres objetos están bien definidos ya que todas las sucesiones involucradas están limitadas. Es fácil comprobar que son mapeos lineales y continuos de $\mathcal{P}'$ en sí mismos y que, como tales, dependen continuamente de t. Además $W(0) = 0, C(0) = 1$ y

$$C(t)f = \partial_t W(t)f$$

en el sentido de que:

$$\lim_{h\to 0}\left\langle \frac{W(t+h)-W(t)}{h}f,\phi\right\rangle = \langle C(t)f,\phi\rangle, \forall\phi\in P$$

sigue de esto que (2.24) puede ser escrito como

$$u(t) = \partial_t W(t)\phi + W(t)\psi. \tag{2.28}$$

Queda por mostrar que (2.24) pertenece a H^s_{per} y es la solución de la ecuación de onda (O). Estableceremos este resultado en los próximos dos teoremas. El primero muestra que

$$u(t) = \partial_t W(t)\phi + W(t)\psi$$

satisface la ecuación de onda.

$$(O)\left|\begin{array}{l} u\in C([0,T],H^s_{per})\cap C^1([0,T];H^{s-1}_{per})\\ \partial_t^2 u = c^2\partial_x^2 u(t)\\ u(0)=\phi\in H^s_{per}, \partial_t u(0)=\psi\in H^{s-1}_{per}.\end{array}\right.$$

El último está dedicado a la dependencia continua.

Teorema 14. *Sea $s\in\mathbb{R}$ fijo. Entonces $W(t)\in\mathcal{B}(H^{s-1}_{per},H^s per)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ y el mapeo $t\in\mathbb{R}\to W(t)$ es fuertemente continuo, esto es,*

$$\lim_{t\to t'}\|W(t)\psi - W(t')\psi\|_s = 0, \forall\psi\in H^{s-1}_{per}, \forall t\in\mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Además,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{W(t+h)\psi - W(t)\psi}{h} - C(t)\psi\right\|_{s-1} = 0, \tag{2.30}$$

y

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\partial_t W(t+h)\psi - \partial_t W(t)\psi}{h} + c^2|D|^2 W(t)\psi\right\|_{s-2} = 0, \tag{2.31}$$

converge uniformemente con respecto a t. En particular $W(t)\psi$ satisface $W(0)\psi=0$, $\partial_t W(0)\psi=\psi$ y resuelve la ecuación de onda

$$\partial_t^2 W(t)\psi = c^2\partial_x^2 W(t)\psi$$

con las derivadas de tiempo calculadas según (2.30) y (2.31)

Demostración. La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

1. Primero probaremos que $W(t)\psi\in H^s_{per}$. Sea $t>0, \psi\in H^{s-1}_{per}$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\|W(t)\psi\|_s^2 &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\frac{sen(c|k|t)}{c|k|}\widehat{\psi}(k)\right|^2\\ &\le 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-1}(1+k^2)\left|\frac{1}{c|k|}\widehat{\psi}(k)\right|^2\end{aligned}$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1}(1+k^2)\frac{1}{c^2k^2}|\widehat{\psi}(k)|^2$$
$$= \frac{2\pi}{c^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1}\left(\frac{1}{k^2}+1\right)|\widehat{\psi}(k)|^2$$
$$\leq \frac{4\pi}{c^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1}|\widehat{\psi}(k)|^2 = \frac{2}{c^2}||\psi||_{s-1}^2 < \infty$$

en consecuencia, $W(t)\psi \in H^s_{per}$.

2. Ahora probaremos la continuidad fuerte (2.29). Sea $t' \in \mathbb{R}$ fijo, entonces:

$$\begin{aligned}
&\|W(t)\psi - W(t')\psi\|_s^2 \\
&\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\frac{sen(c|k|t)}{c|k|}\widehat{\psi}(k) - \frac{sen(c|k|t')}{c|k|}\widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s|\widehat{\psi}(k)|^2\frac{1}{c^2k^2}|\underbrace{sen(c|k|t) - sen(c|k|t')}_{H(k,t):=}|^2
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Se observa que $\lim_{t\to t'} H(k,t) = 0$. Ahora necesitamos la convergencia uniforme de la serie (2.32) para el intercambio de límites y para esto, acotamos el k-ésimo término de la serie y los mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$\begin{aligned}
I_{k,t} &= 2\pi(1+k^2)^s|\widehat{\psi}(k)|^2\frac{1}{c^2k^2}|sen(c|k|t) - sen(c|k|t')|^2 \\
&\leq 2\pi(1+k^2)^{s-1}(1+k^2)\frac{2}{c^2k^2}|\widehat{\psi}(k)|^2 \\
&= \frac{4\pi}{c^2}(1+k^2)^{s-1}\left(\frac{1}{k^2}+1\right)|\widehat{\psi}(k)|^2 \\
&\leq \frac{8}{c^2}\pi(1+k^2)^{s-1}|\widehat{\psi}(k)|^2.
\end{aligned}$$

Así
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq \frac{4}{c^2}||\psi||_{s-1}^2 < \infty$$

en consecuencia usando el M-test de Weierstrass tenemos que la serie (2.32) converge absoluta y uniformemente a una función continua en t y podemos intercambiar el límite y obtenemos:

$$\lim_{t\to t'} \|W(t)\psi - W(t')\psi\|_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{t\to t'} I_{k,t} = 0.$$

3. Seguidamente probaremos (2.30). Sea $t \in \mathbb{R}$ fijo pero arbitrario. Se tiene:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{W(t+h)\psi - W(t)\psi}{h} - C(t)\psi\right\|_{s-1}^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} \left| \frac{sen(c|k|(t+h))\widehat{\psi}(k) - sen(c|k|t)\widehat{\psi}(k)}{c|k|h} - cos(c|k|t)\widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} |\widehat{\psi}(k)|^2 \left| \underbrace{\frac{sen(c|k|(t+h))) - sen(c|k|t)}{c|k|h} - cos(c|k|t)}_{H(k,h):=} \right|^2 .
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Se observa que $\underset{h\to 0}{lim} H(k,h) = 0$. Ahora necesitamos la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para esto, acotamos el k-ésimo término de la serie (2.33) y lo mayoramos por una serie convergente. En efecto, usando el teorema del valor medio, sobre el intervalo, $[0,h]$ para $h > 0$

$$\frac{sen(c|k|(t+h)) - sen(c|k|t)}{h} = c|k|cos(c|k|(t+c_1))$$

con $c_1 \in [0,h]$ luego,

$$\left|\frac{sen(c|k|(t+h)) - sen(c|k|t)}{c|k|h}\right| = |cos(c|k|(t+c_1))| \leq 1.$$

Análogamente se obtiene para $h < 0$

$$\frac{sen(c|k|(t)) - sen(c|k|(t+h)}{-h} = c|k|cos(c|k|(t+c_2))$$

con $c_2 \in [h,0]$ luego,

$$\left|\frac{sen(c|k|(t+h)) - sen(c|k|t)}{c|k|h}\right| = |cos(c|k|(t+c_2))| \leq 1$$

en consecuencia para $|h| > 0$ se obtiene la acotación requerida para el k-ésimo término:

$$\begin{aligned}
I_{k,h} &= 2\pi(1+k^2)^{s-1}|\widehat{\psi}(k)|^2 \left|\frac{sen(c|k|(t+h)) - sen(c|k|t)}{c|k|h} - cos(c|k|t)\right|^2 \\
&\leq 8\pi(1+k^2)^{s-1}|\widehat{\psi}(k)|^2.
\end{aligned}$$

Así

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,h} \leq 4||\psi||_{s-1}^2 < \infty$$

y en consecuencia. por el M-test de Weierstrass. tenemos que la serie (2.33) converge absoluta y uniformemente a una función continua en h y podemos intercambiar el límite y en consecuencia

$$\underset{h\to 0}{lim} \left\|\frac{W(t+h)\psi - W(t)\psi}{h} - C(t)\psi\right\|_{s-1}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{h\to 0} I_{k,h} = 0.$$

4. Seguidamente probaremos (2.31). Sea $t \in \mathbb{R}$ fijo pero arbitrario. Tenemos:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial_t W(t+h)\psi - \partial_t W(t)\psi}{h} + c^2|D|^2 W(t)\psi \right\|_{s-2} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} \left| \frac{cos(c|k|(t+h))\widehat{\psi}(k) - cos(c|k|t)\widehat{\psi}(k)}{h} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + c^2k^2 \frac{sen(c|k|t)}{c|k|}\widehat{\psi}(k) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} |\widehat{\psi}(k)|^2 \left| \frac{cos(c|k|(t+h)) - cos(c|k|t)}{h} + c|k|sen(c|k|t) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-2} |\widehat{\psi}(k)|^2 c^2k^2 \left| \underbrace{\frac{cos(c|k|(t+h)) - cos(c|k|t)}{c|k|h} + sen(c|k|t)}_{H(k,h):=} \right|^2 .
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Se observa que $\lim\limits_{h\to 0} H(k,h) = 0$. Ahora necesitamos la convergencia uniforme de la serie (2.34) para el intercambio de límites. Para esto, acotamos el k-ésimo término de la serie y los mayoramos por una serie convergente. Como:

$$\left| \frac{cos(c|k|(t+h)) - cos(c|k|t)}{c|k|h} \right| = \left| -4\frac{sen(c|k|(t+h/2))sen(c|k|h/2)}{c|k|h/2} \right| \leq 4$$

entonces ya podemos acotar el k-ésimo término de la serie

$$\begin{aligned}
I_{k,h} &= 2\pi(1+k^2)^{s-1}(1+k^2)^{-1}c^2k^2||\widehat{\psi}(k)|^2|H(k,h)|^2 \\
&\leq 25c^2 2\pi(1+k^2)^{s-1}(1+k^2)^{-1}(1+k^2)|\widehat{\psi}(k)|^2 \\
&= 25c^2 2\pi(1+k^2)^{s-1}|\widehat{\psi}(k)|^2
\end{aligned}$$

Así

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,h} \leq 25c^2||\psi||_{s-1}^2 < \infty$$

y usando el M-test de Weierstrass tenemos que la serie (2.34) converge absoluta y uniformemente a una función continua en h y podemos intercambiar el límite y conseguimos:

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{\partial_t W(t+h)\psi - \partial_t W(t)\psi}{h} + c^2|D|^2 W(t)\psi \right\|_{s-2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{h\to 0} I_{k,h} = 0.$$

□

Teorema 15. *Sea $s \in \mathbb{R}$ fijo. Entonces, $C(t) \in \mathcal{B}(H^s_{per})$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y el mapeo $t \in \mathbb{R} \to W(t)$ es fuertemente continuo, esto es,*

$$\lim_{t\to t'} \|C(t)\phi - C(t')\phi\|_s = 0, \forall \phi \in H^s_{per}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.35}$$

Además,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{C(t+h)\phi - C(t)\phi}{h} + c|D|sen(c|D|t)\phi\right\|_{s-1} = 0 \tag{2.36}$$

y

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\partial_t C(t+h)\phi - \partial_t C(t)\phi}{h} + c^2|D|^2 C(t)\phi\right\|_{s-2} = 0 \tag{2.37}$$

converge uniformemente respecto a t. En particular: $C(t)\phi$ satisface $C(0)\phi = \phi$, $\partial_t C(0)\phi = \phi$ y resuelve la ecuación de onda

$$\partial_t^2 C(t)\phi = c^2\partial_x^2 C(t)\phi$$

donde la derivada en el tiempo esta calculada de acuerdo a: (2.36) y (2.37).

Demostración. La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

1. Primero probaremos (2.35). Sea $t' \in \mathbb{R}$ fijo. Se tiene

$$\begin{aligned}
&\|C(t)\phi - C(t')\phi\|_s^2\\
&\qquad = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|cos(c|k|t)\widehat{\phi}(k) - cos(c|k|t')\widehat{\phi}\right|^2\\
&\qquad = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2\left|\underbrace{cos(c|k|t) - cos(c|k|t')}_{H(k,t):=}\right|^2.
\end{aligned}\tag{2.38}$$

Se observa que $\lim\limits_{t\to t'} H(k,t) = 0$. Ahora necesitamos la convergencia uniforme de la serie (2.38) para el intercambio de limites. Para esto, acotamos el k-ésimo término de la serie y los mayoramos por una serie convergente. En efecto, como $H(k,t) \le 2$, entonces:

$$\begin{aligned}
I_{k,t} &= 2\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2|cos(c|k|t) - cos(c|k|t')|^2\\
&\le 8\pi(1+k^2)^s|\phi|^2 \le 4||\phi||^2
\end{aligned}$$

en consecuencia, por el M-test de Weierstrass, la serie (2.38) converge absoluta y uniformemente a una función continua en t y podemos intercambiar los límites, obteniendo:

$$\lim_{t\to t'}\|C(t)\phi - C(t')\phi\|_s^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lim_{t\to t'} I_{k,t} = 0.$$

2. Seguidamente probaremos (2.36). Sea $t \in \mathbb{R}$ fijo

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{C(t+h)\phi - C(t)\phi}{h} + c|D|sen(c|D|t)\phi\right\|_{s-1}^2\\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-1}\left|\frac{cos(c|k|(t+h))\widehat{\phi}(k) - cos(c|k|t)\widehat{\phi}(k)}{h} + c|k|sen(c|k|t)\widehat{\phi}(k)\right|^2\\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-1}|\widehat{\phi}(k)|^2 c|k|\left|\underbrace{\frac{cos(c|k|(t+h)) - cos(c|k|t)}{c|k|h} + sen(c|k|t)}_{H(k,h):=}\right|^2.
\end{aligned}\tag{2.39}$$

Se observa que $\lim_{h\to 0} H(k,t) = 0$. Ahora necesitamos la convergencia uniforme de la serie (2.39) para el intercambio de límites. Para esto, acotamos el k-ésimo término de la serie por una serie convergente. Usando el teorema del valor medio en $[0,h]$ para $h>0$ se tiene:

$$\frac{cos(c|k|(t+h) - cos(c|k|t))}{c|k|h} = -c|k|sen(c|k|(t+c_1))$$

donde $c_1 \in (0,h)$ luego $|H(k,t)| \leq 2c|k|$ y podemos acotar el k-ésimo término de la serie:

$$\begin{aligned} I_{k,h} &= 2\pi(1+k^2)^{s-1}|\widehat{\phi}(k)|^2 c|k||H(k,t)| \\ &\leq 2\pi c(1+k^2)^{s-1}|k||\widehat{\phi}(k)|^2 2c|k| \\ &= 4\pi c^2(1+k^2)^{s-1}|k|^2|\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &\leq 4\pi c^2(1+k^2)^{s-1}(1+k^2)\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi c^2(1+k^2)^{s}|\widehat{\phi}(k)|^2 \end{aligned}$$

luego

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,h} \leq c||\phi||^2 < \infty$$

en consecuencia por el M-test de Weierstrass la serie (2.39) converge absoluta y uniformemente a una función continua en h y podemos intercambiar los límites

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{C(t+h)\phi - C(t)\phi}{h} + c|D|sen(c|D|t)\phi\right\|_{s-1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to 0^+} I_{k,h} = 0.$$

Análogamente se demuestra el límite lateral izquierdo.

3. Ahora probaremos (2.37). Sea $t \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\partial_t C(t+h)\phi - \partial_t C(t)\phi}{h} + c^2|D|^2 C(t)\phi\right\|_{s-2}^2 \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^{s-2}\left|\frac{-c|k|sen(c|k|(t+h))\widehat{\phi}(k) + c|k|sen(c|k|t)\widehat{\phi}(k)}{h}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + c^2k^2cos(c|k|t)\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^{s-2}c^2k^2\widehat{\phi}(k)|^2\left|\underbrace{\frac{sen(c|k|(t+h)) - sen(c|k|t)}{c|k|h} - cos(c|k|t)}_{H(k,h):=}\right|^2. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Se observa que $\underset{h\to 0}{lim} H(k,h) = 0$. Ahora necesitamos la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para esto, acotamos el k-ésimo término de la serie y lo mayoramos por una serie convergente. Usando el teorema del valor medio en $[0,h]$ para $h > 0$ se tiene:

$$\frac{sen(c|k|(t+h) - sen(c|k|t))}{c|k|h} = c|k|cos(c|k|(t+c_1))$$

donde $c_1 \in (0,h)$ luego $|H(k,t)| \leq 2c|k|$ y podemos acotar el k-ésimo término de la serie

$$\begin{aligned} I_{k,h} &= 2\pi(1+k^2)^s(1+k^2)^{-2}c^2k^2\widehat{\phi}(k)|^2|H(k,t)| \\ &\leq c^2 2\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \end{aligned}$$

luego

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,h} \leq c^2||\phi||_s^2 < \infty$$

en consecuencia por el M-test de Weierstrass la serie (2.40) converge absoluta y uniformemente a una función continua en h y podemos intercambiar los límites

$$\lim_{h\to 0^+}\left\|\frac{\partial_t C(t+h)\phi - \partial_t C(t)\phi}{h} + c^2|D|^2C(t)\phi\right\|_{s-2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to 0^+} I_{k,h} = 0.$$

Análogamente se demuestra el límite lateral izquierdo.

$\square$

3 Ecuación KdV-Kuramoto-Sivashinsky

En este capitulo estudiaremos, siguiendo las ideas de [6,14], el buen planteamiento, la regularidad y el comportamiento asintótico, de la solución de la ecuación KdV-K-S. Tambien estudiamos dicha ecuación cuando el parámetro adimensional β tiende a cero (eliminación del término disipativo). Queremos enfatizar que (P) esta bien puesto y que fue probado intuitivamente en el artículo [14].
Además, en la primera sección se habla sobre el artículo de Topper y Kawahara [17], titulado *Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid*. En dicho articulo se obtiene el modelo de la ecuación no lineal, para ondas largas tridimensionales en un fluido viscoso de Kuramoto-Sivashinsky, de la cual se extrae la ecuación lineal unidimensional motivo de esta tesis.

$$(P) \qquad u_t + u_{xxx} + \beta(u_{xxxx} + u_{xx}) = 0 \text{ en } H^{s-4} \text{ con } u(0) = \phi \in H^s$$

3.1 Aspectos físicos del modelo no lineal de Kuramoto-Sivashinsky

En el artículo de Topper y Kawahara [17], se aplica un método sistemático de perturbación de ondas largas tridimensionales en una película líquida viscosa, y se obtiene la ecuación de evolución no lineal que incorpora los efectos de disipación y dispersión. Se muestra que tanto el término derivada de cuarto orden como la tridimensionalidad tienen efectos estabilizadores.
Varios autores han investigado los movimientos de onda en una capa líquida sobre un plano inclinado desde varios puntos de vista. Este problema ha llamado mucho la atención, no solo porque es interesante como un problema básico de dinámica de fluidos, sino también porque es importante en problemas de ingeniería.
En dicho trabajo, se obtienen ecuaciones aproximadas para ondas largas tridimensionales en un fluido viscoso, que fluye por un plano inclinado de ángulo θ. Johnson ha derivado recientemente la ecuación Korteweg-de Vries-Burgers.
Para este problema. El término derivada de segundo orden de esta ecuación cambia de signo en el valor crítico del número de Froude, $F = 5/2$. Por lo tanto, la condición $F < 5/2$ indica amortiguación de onda, pero la condición $F > 5/2$ indica una inestabilidad.
Se tomaron en cuenta los efectos de disipación de orden superior y generalizaron el resultado de Johnson a ondas largas tridimensionales.
Se prueba que el término derivada de cuarto orden de la ecuación generalizada puede suprimir la inestabilidad que aparece en la ecuación de tipo Korteweg-de Vries-Burgers cuando $F > 5/2$. Además, se muestra que la estructura tridimensional de las ondas puede suprimir una inestabilidad.

3.1.1 Ecuaciones básicas

Se consideró, en el artículo mencionado [17], el movimiento tridimensional de un fluido viscoso e incompresible que fluye hacia abajo en un plano inclinado con ángulo de inclinación θ. Las coordenadas x', y' y z' se toman por el plano inclinado, normal al plano y en dirección transversal, respectivamente. Los componentes de velocidad x', y', z' y la distribución de velocidad media se denotan por u', ζ', w' y $U'(y')$, respectivamente. La profundidad no perturbada es h_0, y la perturbada es $h'(x', z', t')$.
Utilizando la ecuación de continuidad, la ecuación de Navier-Stokes y las condiciones de límite del plano y la superficie libre se redujo a la forma no dimensional (2.1) $\sim$ (2.10) en [17]. En dichas expresiones se introdujeron variables adimensionales de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{r} x' = \iota_0 x, \quad y' = h_0 y, \quad z' = \iota_0 z, \; U' = U_0 U, \quad u' = U_0 u, \\ v' = \dfrac{h_0}{\iota_0} U_0 v, \quad w' = U_0 w, \quad , \quad t' = \dfrac{\iota_0}{U_0} t, \quad h' = h_0(1+\eta), \end{array}\right\}$$

La longitud característica de la perturbación viene dada por ι_0 y la velocidad característica se elige para que sea $U_0 = \sqrt{gh_0 cos\theta}$. Por lo tanto, los parámetros no dimensionales introducidos, debido a la viscosidad, son:

$$\left.\begin{array}{r} \text{el parámetro de onda larga,} \quad \delta = h_0/\iota_0, \\ \text{el número de Reynolds,} \quad R = U_0 h_0/\nu, \\ \text{el número de Froude,} \quad R = U_0 h_0/\nu F = gh_0^2 sin\theta/\nu U_0 \\ \text{y el número de Weber,} \, W = T/\rho g h_0^2 cos\theta \end{array}\right\}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad, v la viscosidad cinemática y T la tensión superficial por unidad de densidad.

3.1.2 Derivación de la ecuación de onda larga

Se considero ondas largas de amplitud pequeña, pero finita, que se propagan a la velocidad de onda cinemática. Suponiendo una no linealidad débil y una longitud de onda larga, con el fin de derivar una ecuación simple, que incorpore el efecto de la viscosidad. Varias posibilidades surgen dependiendo de la importancia relativa de los parámetros δ, R, F, W y la no linealidad. Para sistematizar el análisis de perturbaciones y equilibrar los efectos de la viscosidad y la no linealidad de manera sistemática, se supone que los parámetros R, F y W tienen los órdenes apropiados en δ.
Luego de obtener las ecuaciones (3.5) y (3.6) en [17], que modelan la onda en el caso tridimensional, para el caso bidimensional se obtuvo la siguiente ecuación:

$$\phi_t + \phi\phi_\xi + \alpha\phi_{\xi\xi} + \vartheta\phi_{\xi\xi\xi} + \gamma\phi_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \tag{3.1}$$

Si $\gamma = 0$ se recupera el resultado obtenido por Jhonson; si $\alpha < 0$ se reduce a la ecuación de Korteweg-de Vries-Burguer, mientras que, si $\alpha > 0$ la ecuación resultante puede conducir a una inestabilidad. Aunque para $\alpha < 0$, el término con derivada de cuarto orden agrega solo un efecto de amortiguación (disipativo) adicional, para $\alpha > 0$ juega un rol muy importante.
La ecuación con $\vartheta = 0$, $\alpha > 0$ y $\gamma > 0$ también se ha derivado recientemente en el campo de la turbulencia química. También se concluyó que la derivada de tercer orden agrega otro efecto, el efecto de dispersión.

Observación 16. *En el presente trabajo de tesis se considera el estudio del problema de Cauchy de la parte lineal homogénea de la ecuación* (3.1)*, con movimiento de onda unidimensional en los espacios de Sobolev periódicos dados:*

$$\text{(P)} \qquad u_t + u_{xxx} + \beta(u_{xxxx} + u_{xx}) = 0 \;\; en \;\; H^{s-4} \;\; con \;\; u(0) = \phi \in H^s,$$

con parámetros adimensionales $\alpha = \gamma = \beta; \vartheta = 1$ *en* (3.1) *y con los términos* u_{xxx}, u_{xxxx} *dispersivos y disipativos, respectivamente.*

3.2 Enfoque intuitivo vía Fourier

En esta sección, en el enunciado del teorema 16, estamos agregando la regularidad de la solución de (P) y su prueba en los items 7 y 8, respectivamente.

Teorema 16. *Sea s un número real fijo, $\beta > 0$ y el problema:*

$$(P)\left|\begin{array}{l} u \in C([0, +\infty\rangle, H^s_{per}) \\ \partial_t u + \partial_x^3 u + \beta(\partial_x^4 u + \partial_x^2 u) = 0 \in H^{s-4}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per}. \end{array}\right.$$

Entonces (P) esta globalmente bien puesto, esto es, $\exists! u \in C([0, \infty), H^s_{per})$ satisfaciendo la ecuación (P) así la aplicación : $\phi \to u$, que para cada condición inicial ϕ asigna la solución u de el PVI (P), es continua. Además, dicha solución satisface la regularidad:

$$u(t) \in H^\infty, \; \forall t > 0$$

con $\|u(t)\|_r \leq C\|\phi\|_s, \forall r \in \mathbb{R}$ *y* $t > 0$*, donde*

$$H^\infty := \bigcap_{r \in \mathbb{R}} H^r_{per}.$$

Demostración. La prueba la hacemos ordenadamente en varios pasos.

1. Primero obtenemos el candidato a la solución. Para conseguir ese candidato tomamos la transformada de Fourier a la ecuación en (P)

   $$\partial_t u = -\partial_x^3 u - \beta(\partial_x^4 u + \partial_x^2 u)$$

   y se tiene

   $$\begin{aligned} \partial_t u &= -(ik)^3 \widehat{u} - \beta((ik)^4 \widehat{u} + (ik)^2 \widehat{u}) \\ &= ik^3 \widehat{u} - \beta(k^4 \widehat{u} - k^2 \widehat{u}) \\ &= (ik^3 - \beta(k^4 - k^2))\widehat{u} \\ &= (ik^3 - \beta(k^2 - 1)k^2)\widehat{u} \end{aligned}$$

   el cual para cada k es una ecuación diferencial ordinaria con dato inicial $\widehat{u}(0) = \widehat{\phi}$. Así, resolviendo el PVI:

   $$(P_k)\left|\begin{array}{l} \widehat{u} \in C([0, +\infty), l^2_s(\mathbb{Z})) \\ \partial_t \widehat{u}(k,t) = (ik^3 - \beta(k^2 - 1)k^2)\widehat{u}(k,t) \\ \widehat{u}(k, 0) = \widehat{\phi}(k) \end{array}\right.$$

obtenemos:

$$\widehat{u} = e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}\widehat{\phi},$$

luego nuestro candidato a solución es:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(k,t)\phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^3t}F_k\widehat{\phi}(k)\phi_k \tag{3.2}$$

donde estamos denotando $\phi_k(x) = e^{ikx}$ y $F_k = e^{-\beta(k^2-1)k^2t}$. Recordemos que cuando $k \in \mathbb{Z}$ y $|k| = 1$ o $k = 0$, $F_k = 1$. Cuando $k \in \mathbb{Z}$ y $0 \neq |k| \neq 1$ tenemos que $(k^2-1)k^2 > 0$ y desde que $\beta > 0$ tenemos que $F_K \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Además. $|e^{ik^3t}| = 1$.

2. En segundo lugar, probaremos que:

$$u(t) \in H^s_{per} \quad \text{y} \quad ||u(t)||_s \leq ||\phi||_s. \tag{3.3}$$

En efecto, Sea $t > 0$, $\phi \in H^s$ y recordando que $\;\; e^{-\beta(k^2-1)k^2t} < 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{H^s} =&\ 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \left|e^{ik^3t}e^{-\beta(k^2-1)k^2t}\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)^2|e^{2ik^3t}| \left|e^{-2\beta(k^2-1)k^2t}\right|^2 \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= ||\phi||^2_s < e^{\frac{\beta}{2}t}||\phi||^2_s < \infty
\end{aligned} \tag{3.4}$$

la última desigualdad es porque $e^{-\frac{\beta}{2}t} \leq 1, \forall t \geq 0$
obviamente (3.3) se obtiene para $t = 0$. Así $u(t) \in H^s_{per}$.

3. Ahora, probaremos que $u(\cdot)$ es continua en $[0,\infty)$. Sea $t' \in [0,\infty)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\|u(t) - u(t')\|^2_{H^s} \\
&\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \left|(e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} - e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t'})\right|^2 \\
&\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \,|H(t)|^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde $H(t) := e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} - e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t'}$. Se observa que $\lim\limits_{t\to t'} H(t) = 0$. Para intercambiar los límites, necesitamos de la convergencia uniforme de la serie. Para esto, tomamos el k-ésimo término de la serie (3.5) y lo mayoramos por una serie convergente, i.e.

$$\begin{aligned}
I_{k,t} :=& 2\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} - e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t'}\right|^2 \\
\leq& 8\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad triangular (propiedad de la norma) y la desigualdad $e^{-\theta} \leq 1$ siempre que $\theta \geq 0$. Así:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty,$$

y usando el M-test de Weierstrass, tenemos que la serie (3.5) converge absoluta y uniformemente a una función continua en t. Luego, está permitido el intercambio de límite y obtenemos:

$$\lim_{t\to t'} \|u(t) - u(t')\|^2_{H^s_{per}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{t\to t'} I_{k,t} = 0.$$

y así concluimos que:

$$\lim_{t\to t'} ||u(t) - u(t')||_{H^s_{per}} = 0.$$

4. Seguidamente probaremos que u satisface la diferenciabilidad.

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + \partial_x^3 u + \beta(\partial_x^4 u + \partial_x^2 u) \right\|_{H^{s-4}} \to 0 \ \text{ cuando } \ h \to 0.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + \partial_x^3 u + \beta(\partial_x^4 u + \partial_x^2 u) \right\|^2_{H^{s-4}} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} |\varphi(k)|^2 \left| \frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)} - e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}}{h} \right. \\
&\qquad \left. + (ik)^3 e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} + \beta((ik)^4 + (ik)^2) e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} |\varphi(k)|^2 \left| e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} M(h) \right|^2 \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

donde:

$$M(h) := \left\{ \frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h} - 1}{h} + (ik)^3 + \beta((ik)^4 + (ik)^2) \right\}.$$

Usando la regla de L'Hospital, se tiene que $M(h) \to 0$ cuando $h \to 0$.
Ahora necesitamos las convergencia uniforme de la serie para habilitar el intercambio de límites. Para ello procedemos mayorando el k-ésimo término de serie. Previamente observemos que para $h > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h} - 1}{h} &= \int_0^h \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s} \right\} ds \\
&= \int_0^h \frac{1}{h} [(ik^3 - \beta(k^2-1)k^2] e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s} ds
\end{aligned}$$

y tomando módulos, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h}-1}{h}\right| \\
&\qquad \le \frac{1}{h}|(ik)^3-\beta(k^2-1)k^2|\int_0^h \left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s}\right| ds \\
&\qquad = \frac{1}{h}|(ik)^3-\beta(k^2-1)k^2|\int_0^h \left|e^{ik^3 s}\right|\left|e^{-\beta(k^2-1)k^2)s}\right| ds \\
&\qquad \le \frac{1}{h}\{|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2\}h \\
&\qquad = \{|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2\}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Ahora considerando $h<0$ y $t\ge 0$ se tiene $t+h>0$ para h muy pequeño, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)}-e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}}{h}+[(ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2)]e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}\right| \\
&= \left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)}\left[\frac{1-e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}}{h}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.+((ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2))e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}\right]\right| \\
&= \left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)}\left[\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}-1}{-h}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.+((ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2)e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}\right]\right|
\end{aligned}$$

y tomando norma obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)}\right|\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}-1}{-h}\right. \\
&\qquad\qquad \left.+(ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2)]e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}\right| \\
&\le \left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}-1}{-h}\right|+\left|(ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2)e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}\right|
\end{aligned}$$

del acotamiento anterior (3.7) pues $-h>0$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\le \{|ik|^3+\beta|ik|^4+|k|^2\}+\{|ik|^3+\beta|ik|^4+\beta|k|^2\} \\
&= 2\{|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2\}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Usando las desigualdades (3.7) y (3.8) mayoramos $|M(h)|^2$ como sigue:

$$\begin{aligned}
|M(h)|^2 &\le \{2[|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2]\}^2 \\
&\le [C_4|k|^4]^2 \\
&\le C_5(|k|^2)^4 \\
&\le C_5[1+|k|^2]^4 \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

lo cual también es cierto para el caso $t = 0$, donde usamos (3.7) solamente. Pasamos a mayorar el $I_{k,t,h}$ término de la serie, donde se usa la estimativa (3.9)

$$\begin{aligned} I_{k,t,h} &= (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\varphi}(k)|^2 e^{-2\beta(k^2-1)k^2t}[M(h)]^2 \\ &\leq (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\varphi}(k)|^2|M(h)|^2 \\ &\leq (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\varphi}(k)|^2 C_5(1+|k|^2)^4 \\ &= C_5(1+k^2)^s|\widehat{\varphi}(k)|^2 \end{aligned}$$

y desde que la serie $2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^s|\widehat{\varphi}(k)|^2 = \|\varphi\|^2_{H^s} < \infty$ para $\phi \in H^s_{per}$, usando el M-test de Weierstrass tenemos que la serie (3.6) converge absoluta y uniformemente a una función continua en h y por lo tanto es posible intercambiar los límites y obtener:

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} + \partial_x^3 u + \beta(\partial_x^4 u + \partial_x^2 u) \right\|^2_{H^{s-4}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

y esto implica lo que queremos probar.

5. Obtenemos la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial, esto es, si ϕ_1 y ϕ_2 son datos iniciales próximos en H^s, entonces sus correspondientes soluciones u_1 y u_2, respectivamente están próximos en el espacio solución. Sea $t > 0$

$$\begin{aligned} \|u_1(t)-u_2(t)\|^2_{H^s} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s \left|\widehat{u_1(t)}(k) - \widehat{u_2(t)}(k)\right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s \left|e^{(ik-\beta(k^2-1))k^2t}\widehat{\phi}_1(k) - e^{(ik-\beta(k^2-1))k^2t}\widehat{\phi}_2(k)\right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s \left|e^{(ik-\beta(k^2-1))k^2t}(\widehat{\phi}_1(k) - \widehat{\phi}_2(k))\right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s \left|e^{ikt}\right| \left|e^{\beta(k^2-1))k^2t}\right| \left|\widehat{\phi}_1(k) - \widehat{\phi}_2(k)\right|^2 \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s \left|\widehat{\phi}_1(k) - \widehat{\phi}_2(k)\right|^2 \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{H^s} \leq \|\phi_1-\phi_2\|_{H^s}$$

y tomando supremo sobre $[0,+\infty)$ se tiene que :

$$0 \leq \|u_1-u_2\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u_1(t)-u_2(t)\|_{H^s} \leq \|\phi_1-\phi_2\|_{H^s} \tag{3.10}$$

de aquí tenemos que si $\phi_1 \to \phi_2$ entonces, $u_1 \to u_2$.

6. Unicidad de la solución: La desigualdad (3.10) nos permitirá mostrar que la solución es única. En efecto, sea $\varphi \in H^s$ y supongamos que existan u_1 y u_2 dos soluciones, entonces usando (3.10) tenemos:

$$\begin{aligned}\|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s_{per}} &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s_{per}} \\ &\leq \|\phi - \phi\|_{H^s_{per}} = 0, \ \forall t \in [0,\infty)\end{aligned}$$

de donde concluimos que $u_1 = u_2$. Así, el problema (P) esta bien puesto y tiene una única solución, el cual depende continuamente del dato inicial, siendo esta solución:

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik^3t-\beta(k^2-1)k^2t}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}.$$

7. Ahora, analicemos la regularidad de la solución. Sea $t > 0$, de (3.4) tenemos para $r > s$,

$$\begin{aligned}||u(t)||_r^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^r |\widehat{\phi}(k)|^2 \left| e^{ik^3-\beta(k^2-1)k^2t} \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^r |\widehat{\phi}(k)|^2 \left| e^{2ik^3t} \right| \left| e^{-\beta(k^2-1)k^2t} \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 |F(t,k)| \\ &\leq c^* 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 < \infty \\ &= C^* ||\phi||_s^2.\end{aligned}$$

donde $F(k,t) := e^{-2\beta(k^2-1)k^2t}(1+k^2)^{r-s}$ y satisface $|F(t,k)| \leq C^*, \forall k \in \mathbb{Z}, t > 0$. Así

$$u(t) \in H^r_{per}, \forall r \in (s. +\infty) \tag{3.11}$$

El caso $r = s$ ya probamos en el item 2.

8. Ahora, consideremos el caso $r < s$. Aquí nosotros tenemos $H^s_{per} \subset H^r_{per}$ y por el dato inicial $\phi \in H^s_{per}$ entonces $\phi \in H^r_{per}$ satisfaciendo:

$$\|\phi\|_r \leq \|\phi\|_s \tag{3.12}$$

de (3.4) para $r < s$ y usando (3.12) tenemos $||u(t)||_r^2 \leq ||\phi||_r^2 \leq ||\phi||_s^2 < \infty$. Esto es,

$$u(t) \in H^r_{per}, \forall r \in (-\infty, s). \tag{3.13}$$

En consecuencia, de (3.11) y (3.13) concluimos que para $t > 0, u(t) \in H^r_{per}, \forall r \in \mathbb{R}$, existe $C := max\{1, \sqrt{c^*}\}$ tal que

$$||u(t)||_r \leq C||\phi||_s, \forall r \in \mathbb{R}, \forall t > 0.$$

$\square$

Como consecuencia del teorema anterior 16, tenemos el siguiente corolario

Corolario 5. *Con las hipótesis del precedente teorema obtenemos:*

$$u \in C([0,\infty), H^s_{per}), \forall r \leq S$$

$$\textit{También} \qquad \|u(t)\|_r \leq \|\phi\|_s, \forall t \geq 0, \forall r \leq s \quad y \quad \sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_r \leq \|\phi\|_s, \forall r \leq s$$

Si $r > s$ *entonces* $\|u(t)\|_r \leq \sqrt{C^*}\|\phi\|_s, \forall t > 0$ *donde* C^* *cumple* $|G(k,t)| \leq C^*, \forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall t > 0$, *con* $G(k,t) = e^{2\beta(k^2-1)k^2t}(1+k^2)^{r-s}$. *Finalmente*

$$\|u(t)\|_r = min\{1, \sqrt{C^*}\}\|\phi\|_s, > 0, \forall r \in \mathbb{R}.$$

Corolario 6. *La única solución de la ecuación* (P) *es:*

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^3t-\beta(k^2-1)k^2t}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}.$$

3.3 Enfoque vía Semigrupos

En esta sección presentamos una familia de operadores que forman un semigrupo de clase C_0, tal como lo hacemos en el teorema 17. Finalmente, establecemos el teorema 18, que es una versión fina del teorema 17, basada en el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Teorema 17. *Sea* $\beta > 0$ *y* $s \in \mathbb{R}$. *La aplicación* $S : [0,\infty) \to L(H^s_{per})$, *que asigna a* t *el operador* $S(t) = e^{-(\partial_x^3+\beta(\partial_x^4+\partial_x^2))t}$, *es decir, aplica* $S(t)\phi = \{e^{-(ik^3t-\beta(k^4-k^2))t}\widehat{\phi}(k)\}^\vee, \{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo de clase* C_0 *de contracción en* H^s_{per}. *Además las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. $S(\cdot)\phi \in C([0,\infty), H^s_{per})$
2. *La aplicación* $\phi \to S(\cdot)\phi$ *es continua y verifica:*

$$\|S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall t > 0$$

y

$$\sup_{t\geq 0}||S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2||_{H^s_{per}} \leq ||\phi_1 - \phi_2||_{H^s_{per}}.$$

Demostración. La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma.

1. Primero observemos que

$$S(0)\phi = \{e^{-(ik^3-\beta(k^4-k^2))(0)}\widehat{\phi}(k)\}^\vee = \{\widehat{\phi}(k)\}^\vee = \phi$$

así $S(0) = I$. Además de la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier y de su inversa, tenemos que $S(t)$ es lineal, es decir, $S(t) \in L(H^s_{per})$

2. Si $\phi \in H^s_{per}$ probaremos que $S(t)\phi \in H^s_{per}$ y $||S(t)\phi||_s \leq |||\phi||_s$, esto es, $||S(t)|| < 1$.
   En efecto, similar a (3.4) se tiene:

$$
\begin{aligned}
\|S(t)\phi\|^2_{per} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \left| e^{ik^3t-\beta(k^2-1)k^2t}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \left| e^{2ik^3t}\right| \left| e^{-2\beta(k^2-1)k^2t}\right| \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 e^{-2\beta(k^2-1)k^2t} \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 = \|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

   Entonces:
   $S(t)\phi \in H^s_{per}$ y $||S(t)\phi||_s \leq ||\phi||_s$, esto es, $S(t) \in L(H^s_{per})$ con $||S(t)|| \leq 1$.

3. Seguidamente probaremos que: $S(t+r) = S(t)S(r), \forall t, r \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
S(t+r)f(x) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^3(t+r)-\beta(k^2-1)k^2(t+r)}\widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^3t-\beta(k^2-1)k^2t}\left\{e^{ik^3r-\beta(k^2-1)k^2r}\widehat{f}(k)\right\} e^{ikx} \\
&= S(t)g(x),
\end{aligned}
$$

   donde g es tal que: $\widehat{g}(k) = e^{ik^3r-\beta(k^2-1)k^2r}\widehat{f}(k), \forall k \in \mathbb{Z}$. Así

$$
g(x) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^3r-\beta(k^2-1)k^2r}\widehat{f}(k)e^{ikx} = S(r)f(x)
$$

   en consecuencia $S(t+r)f = S(t)S(r)f, \forall t, r \geq 0$.

4. Ahora, probaremos la continuidad de: $t \to S(t)\phi$

$$
\|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|_{H^s_{per}} \to 0, \text{cuando}, \ h \to 0. \qquad (3.15)
$$

   En efecto, usando el item 3 de la prueba del teorema anterior, tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| (e^{ik^3(t+h)-\beta(k^2-1)k^2(t+h)} - e^{ik^3t}e^{-\beta(k^2-1)k^2t})\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 |H(k,h)|^2 \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

donde

$$H(k,h) := e^{ik^3(t+h)-\beta(k^2-1)k^2(t+h)} - e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}.$$

Observamos que: $\underset{h\to 0}{lim} H(k,h) = 0$. Ahora necesitamos otra ves la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para esto, tomemos el término $I_{k,h}$ de la serie (3.16) y lo acotamos por una serie convergente, esto es:

$$\begin{aligned} I_{k,t,h} &= 2\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \left| e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)} - e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} \right|^2 \\ &= 2\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \left| e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} \right|^2 \left| e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h} - 1 \right|^2 \\ &\leq 8\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad triangular (propiedad de la norma) y la desigualdad $e^{-\theta} \leq 1$ para $\theta \geq 0$. Así

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{k,t,h} \leq 4||\phi||^2_{per} < \infty \tag{3.17}$$

entonces usando el M-test de Weierstrass obtenemos que la serie (3.16) converge absoluta y uniformemente a una función continua en h luego podemos intercambiar los límites, esto es:

$$\lim_{h\to 0} ||S(t+h)\phi - S(t)\phi||^2_{per} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} I_{k,h,t} = 0$$

y de esto concluimos: (3.15):

$$\lim_{h\to 0} ||S(t+h)\phi - S(t)\phi||_{H^s_{per}} = 0.$$

□

Observación 17. *Tenemos que*

$$\lim_{t\to 0^+} ||S(t)\phi - \phi||_{H^s_{per}} = 0.$$

Observación 18. *De la observación anterior* 17 *tenemos que:* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo de clase* C_0*. Así, por la observación* 17 *y la definición* 19*, de la sección de preliminares, se tiene que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo de contracción de clase* C_0 *en* H^s_{per}*. Sea* ϕ_1 *y* ϕ_2 *datos próximos en* H^s_{per}*, entonces se prueba que sus correspondientes* $S(\cdot)\phi_1$ *y* $S(\cdot)\phi_2$ *son próximos.*
En efecto, desde que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es de contracción para* $t \geq 0$*, tenemos:*

$$\|S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} = \|S(t)(\phi_1 - \phi_2)\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}.$$

Tomando supremo sobre $[0,\infty)$ *obtenemos:*

$$\underset{t\in[0,+\infty)}{sup} \|S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}. \tag{3.18}$$

De aquí tenemos que si $\phi_1 \to \phi_2$ *entonces:* $S(\cdot)\phi_1 \to S(\cdot)\phi_2$*.*

Teorema 18. *Sea $\beta > 0, s \in \mathbb{R}$ y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ el semigrupo de clase C_0 del teorema 17, entonces, $S(t)\phi$ es la única solución de:*

$$(P_1)\left|\begin{array}{l} u \in C([0,\infty), H^s_{per}) \\ u_t = Au \quad\ \ \in H^{s-4}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per}. \end{array}\right.$$

En el sentido que

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{S(t+h)\phi - S(t)\phi}{h} - AS(t)\phi\right\|_{H^{s-4}_{per}} = 0 \tag{3.19}$$

donde: $A := -\partial_x^3 - \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)$, y si $\phi_1 \to \phi_2$ entonces $S(\cdot)\phi_1 \to S(\cdot)\phi_2$ además, la siguiente regularidad es satisfecha: Si $\phi \in H^s_{per}$, entonces $S(t)\phi \in H^\infty, \forall t > 0$ y existe una constante $C > 0$ tal que $||S(t)\phi||_{H^r_{per}} \leq C||\phi||_{H^s_{per}}, \forall t > 0$ y $\forall r \in \mathbb{R}$.

Demostración. La prueba la hacemos ordenadamente en varios pasos.

1. Primero probaremos (3.19):

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{S(t+h)\phi - S(t)\phi}{h} - AS(t)\phi\right\|^2_{H^{s-4}_{per}} \\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{s-4}\left|\left(\frac{S(t+h)\phi - S(t)\phi}{h} - AS(t)\phi\right)^\wedge\right|^2 \\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{s-4}\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))(t+h)}\widehat{\phi}(k) - e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))t}\widehat{\phi}(k)}{h}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - (ik^3 - \beta(k^4-k^2))e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))t}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{s-4}|\widehat{\phi}(k)|^2|e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))t}|^2\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))h}-1}{h}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - (ik^3-\beta(k^4-k^2))\right|^2 \\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^{s-4}|\widehat{\phi}(k)|^2 e^{-2\beta(k^4-k^2)t}|M(k,h)|^2
\end{aligned} \tag{3.20}$$

donde

$$M(k,h) := \left\{\frac{e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))h}-1}{h} + (ik)^3 + \beta(ik)^4 + (ik)^2\right\}.$$

Usando la regla de L'Hospital, tenemos que $M(k,h)$ tiende a cero cuando $h \to 0$. Para intercambiar los límites necesitamos acotar el término $I_{k,h}$ de la serie (3.20). Previamente observamos que para $h > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))h}-1}{h} &= \int_0^h \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))s}\right)ds \\
&= \int_0^h \left(\frac{1}{h}(ik^3-\beta(k^4-k^2))e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))s}\right)ds
\end{aligned}$$

tomando norma obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))h}-1}{h}\right| & \\
&\leq \frac{1}{h}\int_0^h \left|((ik^3-\beta(k^4-k^2))e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))s}ds)\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\left|ik^3-\beta(k^4-k^2)\right|\int_o^h 1ds \\
&= \frac{1}{h}(|k|^3+\beta|k|^4+|k|^2)h \\
&= |k|^3+\beta(|k|^4+|k|^2), \quad h>0 \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

considerando $h<0$ para el caso $t\neq 0$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)}-e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}}{h}+[(ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2)]e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}\right| \\
&= \left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)}\left[\frac{1-e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}}{h}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.+((ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2))e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}\right]\right| \\
&= \left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)}\left[\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}-1}{-h}\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.+((ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2)e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}\right]\right|
\end{aligned}
$$

tomando norma se tiene:

$$
\begin{aligned}
&= \left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)}\right|\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}-1}{-h}\right. \\
&\qquad\qquad \left.+((ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2)e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}\right| \\
&\leq \left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}-1}{-h}\right|+\left|((ik)^3+\beta((ik)^4+(ik)^2)e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(-h)}\right|
\end{aligned}
$$

del acotamiento anterior (3.21) pues $-h>0$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\leq \{|ik|^3+\beta|ik|^4+|k|^2\}+\{|ik|^3+\beta|ik|^4+\beta|k|^2\} \\
&= 2\{|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2.\} \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Usando las desigualdades (3.21) y (3.22) podemos acotar $|M(h)|^2$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
|M(h)|^2 &\leq \{2(|k|^3+\beta|k|^4+|k|^2|)\}^2 \\
&\leq \{C_4|k|^4\}^2 \\
&\leq C_5[|k|^2]^4 \\
&\leq C_5[1+k^2]^4. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Ademas, esto es cierto en el caso $t = 0$, donde solo se usa (3.20)
luego mayoramos el $I_{k,t}$ término de la serie. Aquí usamos la estimación: (3.23)

$$\begin{aligned}
I_{k,t} &= (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\phi}(k)|^2|M(h)|^2 e^{-2\beta(k^4-k^2)t} \\
&\leq (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\phi}(k)|^2|M(h)|^2 \\
&\leq (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\phi}(k)|^2|C_5(1+k^2)^4 \\
&= C_5(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2
\end{aligned}$$

y desde que

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 = \|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty$$

para $\phi \in H^s_{per}$ los $I_{k,t}$ están acotados, luego usando el M-test de Weierstrass la serie (3.20) converge absolutamente y uniformemente a una función continua en h y es posible intercambiar los límites obteniendo (3.19):

$$\left\|\frac{S(t+h)\phi - S(t)\phi}{h} - AS(t)\phi\right\|_{H^{s-4}_{per}} \to 0 \quad \text{si} \quad h \to 0$$

que es lo que queríamos demostrar.

2. Ahora, veamos la dependencia continua respecto al dato inicial ϕ, es decir, que si $\phi_1 \to \phi_2$ entonces: $S(t)\phi_1 \to S(t)\phi_2$. En efecto:

$$\begin{aligned}
&||S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2||^2_{H^s_{per}} \\
&\quad = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\left|(S(t)\phi_1 - S(t)\phi_2)^\wedge(k)\right|^2 \\
&\quad = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\left|e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))t}\widehat{\phi}_1(k) - e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))t}\widehat{\phi}_2(k)\right|^2 \\
&\quad = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\left|e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))t}\right|^2|\widehat{\phi}_1(k) - \widehat{\phi}_2(k)|^2 \\
&\quad \leq 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\left|(\phi_1-\phi_2)^\wedge(k)\right|^2 = ||\phi_1-\phi_2||^2_{H^s_{per}}
\end{aligned}$$

luego si $\phi_1 \to \phi_2$ entonces: $S(t)\phi_1 \to S(t)\phi_2$.

3. Seguidamente veamos la regularidad de la solución, es decir, que si $\phi \in H^s_{per}$ entonces $S(t)\phi \in H^\infty, \forall t > 0$ y existe una constante $C > 0$ tal que $\|S(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq C\|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall t, \forall r \in \mathbb{R}$. En efecto, sea $t > 0$. Para $r > s$

$$\|S(t)\phi\|^2_r = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^r\left|e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))t}\widehat{\phi}(k)\right|^2$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \left| e^{(ik^3-\beta(k^4-k^2))t} \right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 (1+|k|^2)^{r-s}$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \left| e^{2ik^3t} e^{-\beta(k^4-k^2)t} \right|^2 |\widehat{\phi}(k)|^2 (1+|k|^2)^{r-s}$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \underbrace{e^{-2\beta(k^4-k^2)t}(1+|k|^2)^{r-s}}_{F(k,t):=}$$

se observa que: $F(k,t) = e^{-2\beta(k^4-k^2)t}(1+|k|^2)^{r-s}$ esta acotada, es decir existe un C^* tal que $|F(k,t)| \leq C^*, \forall k \in \mathbb{Z}, t > 0$ y en consecuencia:

$$||S(t)\phi||_r^2 \leq C^* ||\phi||_s^2 \text{ y } S(t)\phi \in H^r_{per}, \text{para}, \; r > s. \tag{3.24}$$

Ahora, si $r < s$ se sabe que $H^s_{per} \subset H^r_{per}$ y como $S(t)\phi \in H^s_{per}$, entonces, $S(t)\phi \in H^r_{per}$ con $||S(t)\phi||_r \leq ||S(t)\phi||_s$ y en consecuencia:

$$S(t)\phi \in H^r_{per}, \quad \text{para}, \; r < s. \tag{3.25}$$

Por lo tanto, de (3.24) y (3.25) se tiene: $S(t)\phi \in H^r_{per}, \forall r \in \mathbb{R}, t > 0$ osea $S(t)\phi \in H^\infty; \forall t > 0$ y tomando $C = max\{1, \sqrt{C^*}\}$ se tiene

$$\|S(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq C\|\phi\|_{H^s_{per}}, \forall t > 0; \forall r \in \mathbb{R}.$$

□

3.4 Comportamiento de u_β cuando $\beta \to 0$

Dado $\beta > 0$, denotemos por u_β la solución del problema (P), esto es,

$$u_\beta(x,t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} e^{ik^3t} e^{-\beta(k^2-1)k^2t} \widehat{\phi}(k) e^{ikx}.$$

Primero, analizaremos el comportamiento asintótico de la solución $u_\beta(x,t)$. Para esto, usaremos el M-test de Weierstrass, obteniendo la siguiente proposición:

Proposición 10. *Se tiene:*

$$\lim_{t\to+\infty} u_\beta(x,t) = 0, \; \beta > 0.$$

Demostración.

$$u_\beta(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik^3t} e^{-\beta(k^2-1)k^2t} \widehat{\phi}(k) e^{ikx}, \quad \beta > 0 \text{ fijo}$$

$$u_\beta(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik^3t} \underbrace{e^{-\beta(k^2-1)k^2t}}_{H(t,k):=} \widehat{\phi}(k) e^{ikx}. \tag{3.26}$$

Se observa que $\underset{t\to+\infty}{lim} H(t,k) = 0$, y para obtener la convergencia uniforme de la serie, necesitamos acotar el k-ésimo término de la serie. Desde que $|H(t,k)| \leq 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}|I_{k,t}| &= \left|e^{ik^3t}e^{-\beta(k^2-1)k^2t}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}\right| \\ &\leq |\widehat{\phi}(k)e^{ikx}|\end{aligned}$$

y como la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}(k)e^{ikx} = \phi(x)$ es convergente, entonces existe un $M > 0$ tal que la siguiente serie esta acotada:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |I_{k,t}| < M.$$

Luego, por el M-test de Weierstrass, la serie (3.26) converge absoluta y uniformemente a una función continua en t, y podemos intercambiar los límites.

$$\lim_{t\to+\infty} u_\beta(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{t\to+\infty} I_{k,t} = 0.$$

$\square$

Ahora, queremos conocer y analizar el comportamiento de $u_\beta(x,t)$, cuando $\beta \to 0^+$. Usando otra vez el M-test de Weierstrass obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 11. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. $\lim_{\beta\to 0^+} u_\beta(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}$.

2. $\lim_{\beta\to 0^+} \|u_\beta(t) - g_0(t)\|_s = 0$ *donde* $g_0(t) = \{e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)\}^\vee$.

3. $\lim_{\beta\to 0^+} \|u_\beta(t)\|_s = \|\phi\|_s$.

Demostración. La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

1. Probaremos el item 1. Sea $t > 0$ fijo pero arbitrario, se tiene:

$$u_\beta(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik^3t}e^{-\beta(k^2-1)k^2t}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}$$

$$u_\beta(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik^3t}\underbrace{e^{-\beta(k^2-1)k^2t}}_{H(t,k,\beta):=}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}. \tag{3.27}$$

Se observa que: $\underset{\beta\to 0^+}{lim} H(t,\beta,k) = 1$ y para obtener la convergencia uniforme de la serie necesitamos acotar el k-ésimo término de la serie. Desde que $|H(t,\beta,k)| \leq 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}|I_{t,\beta,k}| &= \left|e^{ik^3t}e^{-\beta(k^2-1)k^2t}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}\right| \\ &\leq |\widehat{\phi}(k)e^{ikx}|\end{aligned}$$

y como la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(k)e^{ikx} = \phi(x)$ es convergente, entonces existe un $M > 0$ tal que la siguiente serie esta acotada.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |I_{k,t}| < M.$$

Luego por el M-test de Weierstrass la serie (3.27) converge absoluta y uniformemente a una función continua en β y podemos intercambiar los límites:

$$\lim_{\beta\to 0^+} u_\beta(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{\beta\to 0^+} I_{t,\beta,k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}.$$

2. Seguidamente probaremos el item 2. Sea $t > 0$ fijo pero arbitrario, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|u_\beta(t) - g_0(t)\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|[u_\beta(t) - g_0(t)]^\wedge\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|\widehat{u_\beta}(k) - e^{ik^3}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|e^{ik^3t}e^{-\beta(k^2-1)k^2t}\widehat{\phi}(k) - e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \left|e^{-\beta(k^2-1)k^2t} - 1\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \left|\underbrace{e^{-\beta(k^2-1)k^2t} - 1}_{H(t,k,\beta):=}\right|^2 .
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Se observa que $H(t,k,\beta) \to 0^+$ cuando $\beta \to 0^+$. Para el intercambio de límites debemos acotar el término $I_{t,k,\beta}$ de la serie: (3.28)

$$\begin{aligned}
I_{t,k,\beta} &= (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \left|e^{-\beta(k^2-1)k^2t} - 1\right|^2 \\
&\le 4(1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2,
\end{aligned}$$

por la desigualdad triangular y el hecho de que $e^{\vartheta} \le 1, \vartheta < 0$ obtuvimos:

$$\left|e^{-\beta(k^2-1)k^2t} - 1\right| \le 2.$$

En consecuencia

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{k,t,\beta} \le 2||\phi||_s^2$$

luego por el M-test de Weierstrass la serie (3.28) converge absoluta y uniformemente convergente a una función continua en β y podemos intercambiar los límites

$$\lim_{\beta\to 0^+} \|u_\beta(t) - g_0(t)\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{\beta\to 0^+} I(k,t,\beta) = 0$$

en consecuencia:

$$\lim_{\beta\to 0^+} \|u_\beta(t) - g_0(t)\| = 0.$$

3. Seguidamente probaremos el item 3. Aplicando el item 1 se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to 0^+} ||u_\beta(t)||_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| e^{ik^3t}\right| \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&= ||\phi||_s^2
\end{aligned}$$

y tomando extremos obtenemos:

$$\lim_{\beta\to 0^+} \|u_\beta(t)\|_s = \|\phi\|_s.$$

□

Por lo que es natural preguntarse si el límite de una familia de soluciones $\{u_\beta(t)\}_{\beta\geq 0}$ es una solución de un problema de valor inicial. La respuesta es afirmativa y podemos decir más: mantiene totalmente las propiedades y parcialmente la regularidad de la familia de soluciones. A continuación, estableceremos estos resultados:

Teorema 19. *Sea s un número real fijo y el problema*

$$(M) \left| \begin{array}{l} u \in C(\mathbb{R}, H^s_{per}) \\ \partial_t u + \partial_x^3 u = 0 \in H^{s-3} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per}. \end{array}\right.$$

Entonces, (M) está globalmente bien puesto, esto es, $\exists! g \in C(\mathbb{R}, H^s_{per})$ verificando la ecuación (M), de modo que la aplicación : $\phi \to g$ que a cada dato inicial ϕ le asigna la solución de (M), es continuo. Además, la solución satisface:

$$g(t) \in H^r_{per}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall r \leq s, \textit{con} \quad \|g(t)\|_r \leq C\|\phi\|_s, \forall r \leq s, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

1. Obtendremos formalmente un candidato de la solución. Para esto aplicamos la transformada de Fourier en (M) a la ecuación:

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u$$

y obtenemos:

$$\partial_t \widehat{u} = ik^3 \widehat{u}$$

que para cada k es una ecuación diferencial ordinaria, con dato inicial: $\widehat{u}(k,0)=\widehat{\phi}(k)$ por lo tanto, al resolver el sistema desacoplado PVI

$$(M_k)\left|\begin{array}{l}\widehat{u}\in C(\mathbb{R},l_s^2(\mathbb{Z}))\\ \partial_t\widehat{u}(k,t)=ik^3\widehat{u}(k,t)\\ \widehat{u}(k,0)=\widehat{\phi}(k)\end{array}\right.$$

se obtiene:

$$\widehat{u}(k,t)=e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)$$

de donde nuestro candidato a solución sería:

$$u(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{u}(k,t)\theta_k=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)\theta_k$$

con $\theta_k(x)=e^{ikx}$.

2. Probaremos que: $u(t)\in H^s_{per}$. En efecto, sea $t\in\mathbb{R}$, $\phi\in H^s_{per}$ y como $|e^{ikt}|\leq 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2_{H^s_{per}}&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^s|\widehat{u}(k)|^2\\ &=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^s|e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)|^2\\ &\leq 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2=\|\phi\|^2_{H^s_{per}}\end{aligned}$$

entonces tomando extremos, obtenemos:

$$\|u(t)\|_s\leq\|\phi\|_s \quad \text{en consecuencia} \quad u(t)\in H^s_{per}.$$

3. Ahora probaremos que: $u(t)$ es continua en $t\in\mathbb{R}$. Sea $t'\in\mathbb{R}$ fijo, entonces

$$\begin{aligned}\|u(t)-u(t')\|^2_{H^s_{per}}&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+k^2\right)^s\left|e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)-e^{ik^3t'}\widehat{\phi}(k)\right|^2\\ &=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+k^2\right)^s\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2\left|\underbrace{e^{ik^3t}-e^{ik^3t'}}_{H(k,t,t'):=}\right|^2\end{aligned}\tag{3.29}$$

se observa que: $\lim\limits_{t\to t'}H(k,t,t')=0$ cuando $t\to t'$. Ahora debemos acotar el término $I_{k,t,t'}$ de la serie (3.29)

$$\begin{aligned}I_{k,t,t'}&=2\pi(1+k^2)^s\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2\left|\underbrace{e^{ik^3t}-e^{ik^3t'}}_{\leq 2}\right|^2\\ &\leq 8\pi(1+k^2)^s\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2\\ &\leq 4(2)\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+k^2\right)^s\left|\widehat{\phi}(k)\right|^2\end{aligned}$$

luego tenemos:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{k,t,t'} \leq 2 \|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty.$$

En consecuencia, por el M-test de Weierstrass, la serie (3.29) converge absoluta y uniformemente a una función continua en t, y podemos intercambiar los límites:

$$\lim_{t\to t'} \|u(t)-u(t')\|^2_{H^s_{per}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{t\to t'} I_{k,t,t'} = 0$$

de donde se concluye que

$$\lim_{t\to t'} \|u(t)-u(t')\|_{H^s_{per}} = 0.$$

4. Probaremos que la derivada de $u(t)$ satisface (M), en la topología H^{s-3}_{per} es decir:

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} + \partial_x^3 u(t) \right\|_{H^{s-3}_{per}} = 0, \ \ \text{cuando}\, h \to 0.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} + \partial_x^3 u(t) \right\|^2_{H^{s-3}_{per}} \\
&\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-3} \left| \left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h} + \partial_x^3 u(t) \right)^{\wedge} \right|^2 \\
&\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-3} \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \left| \frac{e^{ik^3(t+h)}-e^{ik^3t}}{h} + (ik)^3 e^{ik^3t} \right|^2 \\
&\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s-3} \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 \left|e^{ik^3t}\right|^2 \left| \frac{e^{ik^3h}-1}{h} + (ik)^3 \right|^2 . \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}
M(h) = \frac{e^{ik^3h}-1}{h} &= \int_0^h \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial s} e^{ik^s} ds, \\
&= \int_0^h \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial s} e^{ik^3 s} ds = \int_0^h \frac{1}{h} ik^3 e^{ik^3 s} ds
\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{ik^3h}-1}{h} \right| &\leq \frac{1}{h} |k|^3 \int 0^h e^{ik^3 s} ds \\
&\leq \frac{1}{h} |k|^3 \int_0^h 1 ds = \frac{1}{h} |k|^3 (h-0) = |k|^3, \ \text{si}\ h > 0 \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

además,

$$\frac{e^{ik^3h}-1}{h} = -\int_0^h \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}e^{ik^3s}ds, \text{si}\, h<0$$

osea:

$$\left|\frac{e^{ik^3t}-1}{h}\right| \leq |k|^3 \tag{3.32}$$

luego acotamos usando: (3.31) y (3.32) acotamos el término: $I_{k,t,h}$

$$\begin{aligned} I_{k,t,h} &= 2\pi(1+k^2)^{s-3}|\widehat{\phi}(k)|^2\left|e^{ik^3t}M(h)\right|^2 \\ &\leq 2\pi(1+k^2)^{s-3}|\widehat{\phi}(k)|^2(|k|^2)^3 \\ &\leq 2\pi(1+k^2)^{s-3}(1+k^2)^3|\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \end{aligned}$$

entonces:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{k,t,h} \leq \|\phi\|^s_{H^s_{per}} < \infty \tag{3.33}$$

y por el M-test de Weierstrass la serie (3.30) converge absoluta y uniformemente a una función continua en h, y podemos intercambiar los límites.

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}+\partial_x^3\right\|^2_{H^{s-3}_{per}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0} I_{k,t,h} = 0$$

en consecuencia

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}+\partial_x^3 u(t)\right\|_{s-3} = 0, \quad \text{cuando} \quad h\to 0$$

y de esto concluimos que

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0.$$

5. Ahora probaremos la dependencia continua de la solución respecto de la condición inicial. Esto es, sean ϕ_1 y ϕ_2 datos iniciales próximos en H^s_{per}, entonces sus correspondientes soluciones u_1 y u_2 respectivamente, también están próximos en

el espacio solución dado. En efecto. Sea $t \geq 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|(u_1(t) - u_2(t))^{\wedge}\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| e^{ik^3t}\widehat{\phi}_1(k) - e^{ik^3t}\widehat{\phi}_2(k) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| e^{ik^3t} \right|^2 \left| \widehat{\phi}_1(k) - \widehat{\phi}_2(k) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}_1(k) - \widehat{\phi}_2(k) \right|^2 = \|\phi_1 - \phi_2\|^2_{H^s_{per}}
\end{aligned}$$

luego tomando supremo:

$$\underset{t\in\mathbb{R}}{sup} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}. \tag{3.34}$$

En consecuencia. Si $\phi_1 \to \phi_2$ entonces $u_1 \to u_2$

6. Ahora probaremos la unicidad de la solución.
   Sea $\phi \in H^s_{per}$ y supongamos que existen u y g dos soluciones de (M), entonces de (3.34)
   $$\|u(t) - g(t)\|_{H^s_{per}} \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\phi - \phi\| = 0, \forall t \in \mathbb{R}$$
   de donde concluimos que $u = g$, así el problema esta bien puesto y posee una única solución, el cual depende continuamente de los datos iniciales.
   $$g(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}.$$

7. Finalmente probemos la regularidad parcial.
   Consideremos $r \leq s$ luego, por el teorema de inmersión de Sovoleb, (proposición 7) $H^s \hookrightarrow H^r$ y desde que la condición inicial $\phi \in H^s$ entonces $\phi \in H^r$ con $\|\phi\|_r \leq \|\phi\|_s$, y en consecuencia
   $$\begin{aligned}
   \|g(t)\|^2_r &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^r |e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)|^2 \\
   &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^r |\widehat{\phi}(k)|^2 = \|\phi\|^2_r \leq \|\phi\|^2_s
   \end{aligned}$$
   entonces $g(t) \in H^r_{per}$, $\forall r \leq s$ y existe un $C = max\{1, \sqrt{c}\}$ tal que:
   $$\|g(t)\| \leq C\|\phi\|_s, \forall r \leq s.$$

□

De todo lo expuesto se tiene el siguiente corolario

Corolario 7. *La única solución de (M) es:*

$$g(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)e^{ikx}.$$

3.5 Enfoque vía Grupos

La solución obtenida $g(t,x)$ es la serie límite del item 1 de la proposición anterior 11, cuando $\beta \to 0^+$ es la solución $u_\beta(x,t)$, y en consecuencia es afirmativa la aseveración, de que el límite de una familia de soluciones es una solución de un problema de valor inicial. Observamos también que en el teorema anterior se trabajo $\forall t \in \mathbb{R}$, por lo cual, introduciremos una familia de operadores verificando las condiciones de ser un grupo unitario de clase C_0.

Teorema 20. *Sea $s \in \mathbb{R}$. La aplicación:*

$$T : \mathbb{R} \to L(H^s_{per})$$

$$t \to T(t)$$

tal que $T(t) = e^{ik^3t}$, esto es, la aplicación $T(t)\phi = \left\{e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k)\right\}^\vee$, entonces $\{T(t)\}$ es un grupo unitario de clase C_0 en H^s_{per}. Es más, se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. *$T(\cdot)\phi \in C(\mathbb{R}, H^s_{per})$*
2. *La aplicación $\phi \to T(\cdot)\phi$ es continua y satisface:*

$$\|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}$$

y

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|_{H^s_{per}} = \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}.$$

Demostración. Probaremos del item 1 al item 4 que $\{T(t)\}$ es un grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo, según las definiciones 20 y 21 de la sección de preliminares.

1. Probaremos la linealidad de $T(t)$. En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(t)(\phi + \alpha\psi) &= \left\{e^{-ik^3t}(\phi + \alpha\psi)^\wedge(k)\right\}^\vee \\ &= \left\{e^{-ik^3t}(\widehat{\phi}(k) + \alpha\widehat{\psi}(k))\right\}^\vee \\ &= \left\{e^{-ik^3t}(\widehat{\phi}(k)^\vee + \alpha e^{-ik^3t}(\widehat{\psi}(k))^\vee\right\}^\vee \\ &= T(t)\phi + \alpha T(t)\psi. \end{aligned}$$

2. Sea $\phi \in H^s_{per}$. Probaremos que $T(t)\phi \in H^s_{per}$ y $\|T(t)\phi\|_s = \|\phi\|, \forall t \in \mathbb{R}$, es decir, que $T(t) \in L(H^s_{per})$ es una simetría entre los espacios de Hilbert H^s_{per} y unitario. En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|T(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|e^{-ik^3t}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|e^{-ik^3t}\right|^2 \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2, \text{y como } \left|e^{-ik^3t}\right|^2 = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

se tiene:

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|\widehat{\phi}(k)\right|^2 = \|\phi\|^2 < \infty$$

entonces:

$$T(t)\phi \in H^s_{per} \quad y \quad \|T(t)\phi\|_s = \|\phi\|_s$$

en consecuencia:

$$T(t) : H^s_{per} \to H^s_{per} \quad \text{con} \quad \|T(t)\| = 1$$

3. Ahora probaremos que: $T(t+r) = T(t)T(r)\,, \forall t, r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(t+r)f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik^3(t+r)}\widehat{f}(k)e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik^3t}\left\{e^{-ik^3r}\widehat{f}(k)\right\}e^{ikx},\ \forall t, r \in \mathbb{R} \\ &= T(t)g(x) \quad \text{donde } g \text{ es tal que: } \widehat{g}(k) = e^{-ik^3r}\widehat{f}(k),\ \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

así

$$g(x) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^3r}\widehat{f}(k)e^{ikx} = T(r)f(x).$$

En consecuencia:

$$T(t+r)f = T(t)T(r)f, \forall t, r \geq 0.$$

4. Ahora probaremos la continuidad de $t \to T(t)\phi$, es decir.

$$||T(t+h)\phi - T(t)\phi||_{H^s_{per}} \to 0 \text{ cuando } \quad h \to 0.$$

En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} ||T(t+h)\phi - T(t)\phi||^2_{H^s_{per}} & \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|(e^{ik^3(t+h)} - e^{ik^3t})\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2|e^{ik^3t}|^2 \left|\underbrace{(e^{ik^3h} - 1)}_{H(k,h)}\right|^2. \qquad (3.35) \end{aligned}$$

Observamos que $\underset{h\to 0}{lim} H(k,h)=0$. Necesitamos otra ves la convergencia uniforme de la serie para el intercambio de límites. Para esto, tomemos el término $I_{k,h}$ de la serie (3.35) y lo acotamos por una serie convergente, esto es,

$$\begin{aligned} I_{k,h} &= 2\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2|e^{ik^3h}-1|^2 \\ &\leq 4\pi(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2. \end{aligned}$$

Donde hemos usado la desigualdad triangular y la igualdad $e^{i\theta}=1$ para todo $\theta\in\mathbb{R}$. Así

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{k,h} \leq 2||\phi||_{per}^2 < \infty$$

y usando el M-test de Weierstrass obtenemos que la serie (3.35) converge uniformemente a una función continua en h. Entonces, podemos intercambiar los límites, esto es:

$$\lim_{h\to 0}||T(t+h)\phi - T(t)\phi||_{per}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} I_{k,h} = 0$$

y de esto concluimos:

$$\lim_{h\to 0}||T(t+h)\phi - T(t)\phi||_{H^s_{per}} = 0.$$

5. Seguidamente probaremos la continuidad $\phi\to T(\cdot)\phi$.
   En efecto, desde que:

   $$||T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2||_{H^s_{per}} = ||\phi_1-\phi_2||_{H^s_{per}}$$

   entonces, si $\phi_1\to\phi_2$ implica que $T(t)\phi_1\to T(t)\phi_2$ osea es continua, además

   $$\sup_{t\in\mathbb{R}}||T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2||_{H^s_{per}} = ||\phi_1-\phi_2||_{H^s_{per}}.$$

$\square$

Ahora, tenemos la versión del teorema 20 en función del grupo unitario $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Teorema 21. *Sea $s\in\mathbb{R}$ y $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo unitario de clase C_0 en el teorema 20. Entonces $T(\cdot)(\phi)$ es la única solución de :*

$$(M_1)\left|\begin{array}{l} u\in C(\mathbb{R},H^s_{per}) \\ u_t = A_*u \in H^{s-3}_{per} \\ u(0)=\phi\in H^s_{per} \end{array}\right.$$

en el sentido de:

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_*T(t)\phi\right\|_{H^{s-3}_{per}} = 0 \tag{3.36}$$

donde $A_* := -\partial_x^3$, y si $\phi_1\to\phi_2$ entonces $T(\cdot)\phi_1\to T(\cdot)\phi_2$. Además se tiene la siguiente regularidad: Si $\phi\in H^s_{per}$, entonces: $T(t)\phi\in H^r_{per}, \forall r\leq s, \forall t\in\mathbb{R}$ y existe una constante $C>0$ tal que $\|T(t)\phi\|_r\leq C\|\phi\|_s, \forall t\in\mathbb{R}$ y $\forall r\leq s$.

Demostración. La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma.

1. Primero probaremos la diferenciabilidad, es decir, que la derivada de $u(t) = T(t)\phi$, calculada en la topología H^{s-3}_{per}, satisface la ecuación: (3.36)

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_* T(t)\phi\right\|^2_{H^{s-3}_{per}} \\
&\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{s-3} \left|\left(\frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_* T(t)\phi\right)^{\wedge}\right|^2 \\
&\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{s-3} \left|\frac{e^{ik^3(t+h)}\widehat{\phi}(k) - e^{ik^3 t}\widehat{\phi}(k)}{h} - ik^3 e^{ik^3 t}\widehat{\phi}(k)\right|^2 \\
&\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{s-3} |\widehat{\phi}(k)|^2 |e^{ik^3 t}|^2 \left|\frac{e^{ik^3 h} - 1}{h} - ik^3\right|^2 \\
&\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{s-3} |\widehat{\phi}(k)|^2 \left|\underbrace{\frac{e^{ik^3 h} - 1}{h} - ik^3}_{M(h):=}\right|^2 .
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Usando la regla de L'Hospital se observa que $M(h)$ tiende a cero cuando $h \to 0$. Para intercambiar los límites necesitamos acotar el término $I_{k,t}$ de la serie (3.37). Observamos que para $h > 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{ik^3 h} - 1}{h} &= \int_0^h \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s} e^{ik^3 s} ds \\
&= \int_0^h \frac{1}{h} ik^3 e^{ik^3 s} ds
\end{aligned}
$$

y tomando norma:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{e^{ik^3 h} - 1}{h}\right| &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \left|ik^3 e^{ik^3 s}\right| ds \\
&\leq \frac{1}{h}|ik^3| \int_o^h 1 ds = \frac{1}{h}|k|^3 h \\
&= |k|^3, \quad \text{para} \quad h > 0.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

Si se tiene que $h < 0$. entonces:

$$
\begin{aligned}
\frac{e^{ik^3 h} - 1}{h} &= -\int_0^h \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial_s} e^{ik^3 s} ds \\
&= -\int_0^h \frac{1}{h} ik^3 e^{ik^3 s} ds
\end{aligned}
$$

ahora tomando norma, obtenemos:

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{ik^3h}-1}{h}\right| &\leq \frac{1}{|h|}\int_0^h \left|ik^3e^{ik^3s}ds\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}|ik^3|\int_o^h 1ds = \frac{1}{h}|k|^3|h| \\ &= |k|^3. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Por lo tanto, usando estas desigualdades, (3.38) y (3.39) podemos acotar $|M(h)|^2$ como sigue:

$$|M(h)|^2 \leq \{2|k|^3\}^2 \leq 4\{|k|^2\}^3$$

luego mayoramos el $I_{k,t}$ ésimo término de la serie

$$\begin{aligned} I_{k,t} &= (1+k^2)^{s-3}|\widehat{\phi}(k)|^2|M(h)|^2 \\ &\leq (1+k^2)^{s-3}|\widehat{\phi}(k)|^2|4k^2|^3 \\ &= (1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 \end{aligned}$$

y desde que:

$$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 = ||\phi||_{H^s_{per}} < \infty,$$

para $\phi \in H^s_{per}$ entonces los $I_{k,t}$ están acotados, luego usando el M-test de Weierstrass la serie (3.37) converge absolutamente y uniformemente a una función continua en h, y es posible intercambiar los límites obteniendo:

$$\left\|\frac{T(t+h)\phi - T(t)\phi}{h} - A_*T(t)\phi\right\|_{H^{s-3}_{per}} \to 0 \quad \text{si} \quad h \to 0.$$

2. Ahora veamos la dependencia continua respecto a los datos iniciales, es decir, que si: $\phi_1 \to \phi_2$, entonces, $T(t)\phi_1 \to T(t)\phi_2$. En efecto:

$$\begin{aligned} ||T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2||^2_{H^s_{per}} &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\left|(T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2)^\wedge(k)\right|^2 \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\left|e^{ik^3t}\widehat{\phi}_1(k) - e^{ik^3t}\widehat{\phi}_2(k)\right|^2 \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|e^{ik^3t}|^2\left|\widehat{\phi}_1(k) - \widehat{\phi}_2(k)\right|^2 \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\left|(\phi_1-\phi_2)^\wedge(k)\right|^2 = ||\phi_1-\phi_2||^2_{H^s_{per}} \end{aligned}$$

luego si $\phi_1 \to \phi_2$ entonces: $T(t)\phi_1 \to T(t)\phi_2$.

3. Por último, veamos la regularidad, es decir, veamos: que si $\phi \in H^s_{per}$ entonces $T(t)\phi \in H^r_{per}, \forall r \leq s, \forall t \in \mathbb{R}$ y existe una constante $C > 0$ tal que $\|T(t)\phi\|_{H^r_{per}} \leq C\|\phi\|_{H^s_{per}}$, $\forall t, \forall r \in \mathbb{R}$ y $\forall r \leq s$.
   En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$. Para $r \leq s$ se sabe que si $\phi \in H^s_{per}$, entonces: $T(t)\phi \in H^s_{per}$ y por el teorema de inmersión de Sobolev se tiene que $H^s_{per} \subset H^r_{per}$ siempre que $r \leq s$ en consecuencia $T(t)\phi \in H^r_{per}$, $\forall r \leq s$.
   Además,

$$
\begin{aligned}
||T(t)\phi||_r^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^r \left| e^{ik^3t}\widehat{\phi}(k) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^r \left| e^{ik^3t} \right|^2 \left| \widehat{\phi}(k) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 (1+|k|^2)^{r-s} \\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= ||\phi||_s^2 < \infty
\end{aligned}
$$

   pues $\phi \in H^s_{per}$ y $r - s \leq 0$ acota a $(1+|k|^2)^{r-s}$ en consecuencia:

$$||T(t)\phi||_r \leq ||\phi||_s, \ \forall r \leq s, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Corolario 8. *Con las hipótesis del precedente teorema, obtenemos*

1. *Si* $\phi \in H^s_{per}$ *entonces* $T(\cdot)\phi \in C(\mathbb{R}, H^r_{per}), r < s$.
2. *La aplicación* $\phi \to T(\cdot)$ *es continua y satisface*

$$
\begin{aligned}
\|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|_{H^r_{per}} &\leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall r < s, \\
\sup_{t\in\mathbb{R}} \|T(t)\phi_1 - T(t)\phi_2\|_{H^r_{per}} &\leq \phi_1 - \phi_2\|_{H^s_{per}}, \forall r < s.
\end{aligned}
$$

3. $T(t) \in \mathcal{L}(H^s_{per}, H^r_{per})$ *y* $\|T(t)\phi\|_r \leq \|\phi\|_s, \forall r < s, \forall t \in \mathbb{R}, \forall \phi \in H^s_{per}$.

Observación 19. *Remarquemos los hechos de que* $g_0 = g|_{[0,\infty)}$ *y* $T_0 = T|_{[0,\infty)}$ *es un semigrupo de contracción. Por lo tanto, el límite* g_0 *heredó las propiedades de la familia* $\{u_\beta\}_{\beta>0}$.

4 Conclusiones

1. La transformada de Fourier es útil para determinar, en forma intuitiva, la cara de la solución de una ecuación diferencial de tipo periódico en los espacios de Sobolev periódico dados; tal y como se hizo en la ecuación del calor, de la onda y del teorema central de este trabajo, esto es, la ecuación KdV-Kuramoto-Sivashinsky.

2. Es posible dar un enfoque vía teoría de semigrupos y volver a reescribir los resultados obtenidos para la ecuación del calor, y la ecuación central (P) haciéndola mucho mas fina.

3. Estudiamos el comportamiento en el límite, de la solución u_β con parámetro $\beta > 0$, es decir, $\underset{\beta \to 0}{lim}\, u_\beta$, es también solución del problema de valor inicial (P).

4. Se probó la regularidad clásica de la solución $u(t) = S(t)\phi \in C^\infty_{per}$ como consecuencia de la regularidad de dicha solución en las normas de los espacios de Sobolev. Se obtuvo $u(t) = S(t)\phi \in H^\infty$, también de dos maneras.

5. Se probó el decaimiento exponencial de la solución $\underset{t \to \infty}{lim} u(t, x) = 0$.

6. Podemos usar la teoría de grupos unitarios y obtener resultados de existencia en el límite $\beta \to 0$ de la familia de soluciones $\{u_\beta(t)\}_{\beta>0}$ del problema KdV-K-S.

7. Cabe mencionar que en los enfoques vía semigrupos y grupos de las dos ecuaciones diferentes diferenciales, a pesar de que los operadores diferenciales involucrados no son acotados, no se necesitó de los teoremas de existencia de Hille-Yosida (para el caso de semigrupos) o el teorema de Stone (para el caso de grupos). Los teoremas de Hille-Yosida y Stone son criterios fundamentales que proporcionan existencia de solución, pero no muestran la cara de dicha solución. Estos teoremas se usaron debido a que se trabajó directamente con la forma que tenían dichos operadores, evidenciando la cara de la solución, gracias a la transformada inversa de Fourier.

Bibliografía

[1] Adams, R., Fournier, J.(2003). *Sobolev Space.* Elsevier. Second edition.

[2] Brezis, H.(2010). *Functional Analysis, Sovolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext Editorial Springer

[3] Biagioni, H.A., Bona, J.L., Iorio, R. and Scialom.(1996). *On the Korteweg de Vries Kuramoto Sivashinsky equation* Adv. Diff. Eq., 1(1), 1-20

[4] De Guzman, Rubio.(1979). *Integración: Teoría y Técnicas.* Editorial Alhambra. S.A. Madrid

[5] Gatica, Gabriel.(2014). *Introducción al Análisis Funcional: teoría y Aplicaciones.* Editorial Reverté. España

[6] Iorio, R.(2002). *Fourier Analysis and partial Differential Equations.* Cambridge University.

[7] Kato, T.(1983). *On the Cauchy problem for the (generalized) KdV equations* . Studies in Apliedd Math. Advances in math. Suppl. Studies, 8. page 93-128

[8] Kesavan, I.(1989). *Topics in Functional Analysis and applications.* John Wiley & Sons.

[9] Linares, Felipe.(2007). *Ecuaciones dispersivas no lineales. Caso periódico* . XX Escuela Venezolana de Matemática . Mérida, Venezuela. Ediciones IVIC.

[10] Liu, Z. and Zheng, S.(1999). *Semigroups associated with dissipative system* . Chapman & Hall/CRC.

[11] Muñoz Rivera, J.E.(2007).*Semigroups e Ecuacoes Diferenciais Parcias.* Petropolis-LNCC.

[12] Pazy, A.(1983).*Semigruops of linear Operator and applications to partial differential equations.* Appl. Math. Sci, 44 Springer Verlag. Berlin.

[13] Stein, Elias., Shakarchi, Rami.(2003). *Fourier Analysis: An Introduction.* Princeton University Prees. New Jersey.

[14] Santiago Ayala, Yolanda Silvia and Rojas Romero, S.(2017).*Regularity and well-posedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit.* Bulletin of the Allahabad Mathematical Society Vol.32, Part 2, 2017, 207-230

[15] Santiago Ayala, Yolanda Silvia. Santiago Rojas y Teofanes Quispe.(2016). *Espacios de Sobolev periódico y un problema de Cauchy asociado a un modelo de ondas en un fluido viscoso* Theorema, segunda época, 3(4)paginas 7-23

[16] Santiago Ayala, Yolanda Silvia.(2014) *Tópicos de Análisis Funcional. Fundamentos y Aplicaciones* Editorial Académica Española.

[17] Topper, J. and Kawahara, T.(1978). *Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid* J.Phys.Soc.Japan ,44,663-666